Title: Wspólne uogólnienie równania funkcjonałów kwadratowych i równania Wilsona

Author: Radosław Łukasik

Citation style: Łukasik Radosław. (2013). Wspólne uogólnienie równania funkcjonałów kwadratowych i równania Wilsona. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

UNIWERSYTET ŚLĄSKI

Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

ROZPRAWA DOKTORSKA

Radosław Łukasik

Wspólne uogólnienie równania funkcjonałów kwadratowych i równania Wilsona

Promotor

Dr hab. Roman Badora

Katowice 2013

Spis treści

Wstęp

Praca ta w całości poświęcona jest następującemu równaniu funkcyjnemu

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = |K|\alpha(y)g(x) + |K|h(y),\ x,y \in S, \tag{*}$$

gdzie $(S,+)$ jest półgrupą abelową, K jest skończoną podgrupą grupy automorfizmów S, symbolem $|K|$ oznaczamy liczbę elementów grupy K, X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ oraz $f,g,h\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$.

Inspiracja do badania równania (*) płynie z wielu źródeł. W teorii funkcji specjalnych bada się funkcje K-sferyczne (zobacz [**35**]). Funkcja $f\colon G \to \mathbb{C}$, $f \neq 0$, jest funkcją K-sferyczną jeśli istnieje taka niezerowa funkcja $g\colon G \to \mathbb{C}$, że

$$\int_K g(x+\lambda y)d\mu(\lambda) = g(x)f(y),\ x,y \in G,$$

gdzie $(G,+)$ jest grupą lokalnie zwartą, a K zwartą podgrupą grupy automorfizmów G z unormowaną miarą Haara μ (funkcja f spełnia wtedy równanie

$$\int_K f(x+\lambda y)d\mu(\lambda) = f(x)f(y),\ x,y \in G).$$

Równaniu funkcji K-sferycznych poświęcone są m. in. prace W. Chojnackiego [**11**], H. Stetkæra [**33**] czy H. Shin'ya [**26**].

Równanie (*) jest uogólnieniem równania funkcji K-sferycznych w przypadku skończonej grupy K. Ponadto równanie (*) jest wspólnym uogólnieniem wielu klasycznych równań funkcyjnych. Biorąc $K = \{id\}$, $\alpha = 1$, $f = g = h$ otrzymujemy równanie Cauchy'ego

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ x,y \in S,$$

z tym samym K przyjmując $f = g = \alpha$, $h = 0$ $(X = \mathbb{C})$ jego wykładniczą wersję

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ x,y \in S.$$

Ogólnie w przypadku $K = \{id\}$ mamy

$$f(x+y) = \alpha(y)g(x) + h(y),\ x,y \in S$$

i to równanie znajdziemy m. in. w monografii J. Aczéla ([**1**, Theorem 3.1.3.1]).
Jeśli S jest grupą, to biorąc $K = \{id, -id\}$ oraz $\alpha = 1$, $f = g = h$ równanie (*) redukuje się do równania funkcjonałów kwadratowych

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \;\; x, y \in S.$$

Pozostając przy powyższych grupach S i K, przyjmując $\alpha = 1$, $f = g$, $h = 0$ dostajemy równanie Jensena

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x), \;\; x, y \in S,$$

przy $\alpha = 1$, $f = g$ $h(y) = \frac{f(y)+f(-y)}{2}$, $y \in S$ otrzymujemy równanie Drygasa

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y) + f(-y), \;\; x, y \in S,$$

a w przypadku $f = g$, $h = 0$ równanie Wilsona

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\alpha(y)f(x), \;\; x, y \in S.$$

Inne szczególne przypadki równania (*) odnajdziemy w pracach W. Förg-Roba i J. Schwaigera [**14**] oraz Z. Gajdy [**16**], gdzie autorzy badali rozwiązania równania

$$\sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) = |K| f(x) f(y), \;\; x, y \in G$$

dla funkcji f określonej na grupie przemiennej $(G, +)$ i o wartościach w ciele o charakterystyce nie będącej dzielnikiem liczby $|K|$. Podobnie w serii prac H. Stetkæra [**29**], [**30**], [**32**] autor badał ciągłe rozwiązania zespolone następujących szczególnych przypadków równania (*)

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(x + \omega^n y) = N f(x) g(y), \;\; x, y \in \mathbb{C},$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(x + \omega^n y) = N g(x) + N h(y), \;\; x, y \in \mathbb{C},$$

gdzie ω oznacza pierwiastek stopnia N z jedynki.

Celem tej pracy jest podanie pełnego opisu postaci rozwiązań równania (*) czym zajmiemy się w Rozdziale 1. Nasze badania podzielimy na dwa główne przypadki. Pierwszy, gdy α jest funkcją stałą i drugi z niestałą funkcją α.

Rozdział 2 w całości poświęcony jest problemowi stabilności równania (*). Podobnie jak poprzednio i tutaj osobno rozpatrujemy przypadek stałej funkcji α i osobno przypadek, gdy funkcja α nie jest stała.

Dziękuję Panu dr. hab. Romanowi Badora za cenne uwagi dotyczące tej pracy.

ROZDZIAŁ 1

Uogólnienie równania funkcjonałów kwadratowych i równania Wilsona

1.1. Wstęp

W pracy [**31**] H. Stetkær rozważał następujące uogólnienie równania funkcjonałów kwadratowych

$$f(x+y)+f(x+\sigma y)=2f(x)+2f(y),\ x,y\in G,$$

gdzie σ jest takim automorfizmem grupy abelowej G, że $\sigma^2=id_G$, $f,g\colon G\to\mathbb{C}$.

Ten sam matematyk w innej swojej pracy [**32**] rozwiązał równanie funkcyjne

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(z+\omega^n\zeta)=g(z)+h(\zeta),\ z,\zeta\in\mathbb{C},$$

gdzie $N\in\{2,3,\ldots\}$, ω jest pierwiastkiem z jedynki stopnia N, a funkcje $f,g,h\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ są ciągłe.

Badaniem rozwiązań równania funkcyjnego

$$\sum_{\lambda\in K}f(x+\lambda y)=Lg(x)h(y),\ x,y\in G,$$

gdzie $(G,+)$ jest grupą abelową, K jest skończoną podgrupą grupy automorfizmów na G, $L=|K|$, $f,g,h\colon G\to\mathbb{C}$, zajmowali się W. Förg-Rob i J. Schwaiger ([**14**]), Z. Gajda ([**16**]), H. Stetkær ([**29**], [**30**]), R. Badora ([**6**]). Równanie to wiąże się z równaniem funkcji sferycznych

$$\int_K\varphi(x+\lambda y)d\lambda=\varphi(x)\varphi(y),\ x,y\in G,$$

gdzie $(G,+)$ jest lokalnie zwartą grupą abelową, K jest zwartą podgrupą grupy automorfizmów na G, $d\lambda$ oznacza unormowaną miarę Haara na K, które jest rozważane od wielu lat w teorii funkcji specjalnych (A. Wawrzynkiewicz [**35**]).

1.2. Uogólnienie równania funkcjonałów kwadratowych

W całym tym podrozdziale będziemy zakładać, że $(S,+)$ jest półgrupą abelową, K jest skończoną podgrupą grupy automorfizmów S, $L := |K|$ i $(H,+)$ jest grupą abelową.
Zajmiemy się znalezieniem rozwiązań $f, g, h\colon S \to H$ równania postaci

$$\sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) = Lg(x) + Lh(y), \quad x, y \in S.$$

Przypomnijmy najpierw definicję operatora różnicowego.

DEFINICJA 1.2.1. Niech $f\colon S \to H$ oraz $h \in S$. Wówczas symbolem Δ_h oznaczać będziemy operator działający następująco:

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \quad x \in S.$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ symbolem Δ_h^{n+1} oznaczamy złożenie

$$\Delta_h^{n+1} = \Delta_h \circ \Delta_h^n.$$

Mamy również następującą własność operatora różnicowego

FAKT 1.2.2. *Niech $f\colon S \to H$, $h \in S$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wówczas*

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih), \quad x \in S.$$

Skorzystamy z twierdzenia i wniosku udowodnionego przez S. Mazura i W. Orlicza **[23]**, uogólnionego przez D.Ž. Djokovića **[13]**:

TWIERDZENIE 1.2.3. *Załóżmy, że $(H,+)$ jest jednoznacznie podzielna przez $(n+1)!$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Niech $f\colon S \to H$ spełnia równanie*

$$\Delta_v^{n+1} f(u) = 0, \quad u, v \in S.$$

Wówczas istnieją $A_0 \in H$ i k-addytywne, symetryczne odwzorowania $A_k\colon S \to H$, $k \in \{1, \dots, n\}$ takie, że

$$f(x) = A_0 + A_1(x) + \ldots + A_n(x, \dots, x), \quad x \in S.$$

WNIOSEK 1.2.4. *Załóżmy, że $(H,+)$ jest jednoznacznie podzielna przez $(n+1)!$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Niech $f, g\colon S \to H$ spełniają równanie*

$$\Delta_v^n f(u) = g(v), \quad u, v \in S.$$

Wówczas istnieją $A_0 \in H$ i k-addytywne, symetryczne odwzorowania $A_k\colon S \to H$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że

$$f(x) = A_0 + A_1(x) + \ldots + A_n(x, \ldots, x), \ x \in S,$$

$$g(x) = n! A_n(x, \ldots, x), \ x \in S.$$

Rozpoczniemy od udowodnienia kilku pomocniczych lematów.

LEMAT 1.2.5. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^i = 0, \ i \in \{1, \ldots, n-1\}, \ n \neq 1, \tag{1.2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!. \tag{1.2.2}$$

DOWÓD. Najpierw udowodnimy indukcyjnie równość (1.2.1).
Dla $n = 2$ mamy

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^i = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0.$$

Załóżmy, że (1.2.1) zachodzi dla liczb $2, \ldots, n$. Ponieważ

$$k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}, \ k \in \{1, \ldots, n\},$$

to

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} k = (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n}{k-1} = (n+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0.$$

Stąd, dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, mamy

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} k^{i+1} = (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n}{k-1} k^i =$$
$$= (n+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (k+1)^i = (n+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{m=0}^{i} \binom{i}{m} k^m =$$
$$= (n+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} + (n+1) \sum_{m=1}^{i} \binom{i}{m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m =$$
$$= (n+1) \sum_{m=1}^{i} \binom{i}{m} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = 0.$$

Teraz wykażemy indukcyjnie równość (1.2.2). Dla $n = 1$ oraz $n = 2$ mamy

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k^1 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^2 = 4 - 2 = 2.$$

Załóżmy, że (1.2.2) zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Korzystając z (1.2.1) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}k^{n+1} = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{k-1}k^n =$$
$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(k+1)^n = (n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}k^m =$$
$$= (n+1)\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m = (n+1)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n = (n+1)!.$$

□

LEMAT 1.2.6. *Załóżmy, że $(H,+)$ jest jednoznacznie podzielna przez $n!$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Niech $x_1, \dots, x_n \in H$ będą takie, że*

$$\sum_{i=1}^{n} k^i x_i = 0, \ \ k \in \{1, \dots, n\}.$$

Wówczas $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że dla grupy $(H,+)$ z jednoznacznej podzielności przez $n!$ otrzymujemy jednoznaczną podzielność przez $k!$ dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$.
Udowodnimy ten lemat indukcyjnie.
Dla $n = 1$ mamy $x_1 = 0$. Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla $n-1$, $n > 1$. Na mocy lematu 1.2.5 mamy

$$0 = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{i=1}^{n}k^i x_i = \sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^i]x_i = n!x_n.$$

Stąd $x_n = 0$ oraz

$$\sum_{i=1}^{n-1} k^i x_i = 0, \ \ k \in \{1, \dots, n\}.$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0 = x_n,$$

co kończy dowód. □

LEMAT 1.2.7. *Załóżmy, że $(H,+)$ jest jednoznacznie podzielna przez $L!$. Niech dalej dla każdego $k \in \{1, \dots, L\}$ $A_k \colon S \to H$ będzie odwzorowaniem k-addytywnym i symetrycznym, $f \colon S \to H$ będzie funkcją daną wzorem*

$$f(x) = A_1(x) + \ldots + A_L(x, \dots, x), \ \ x \in S.$$

Wówczas funkcja f spełnia równanie

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = Lf(x) + \sum_{\lambda\in K} f(\lambda y), \quad x,y\in S \tag{1.2.3}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{\lambda\in K} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}) = 0, \quad x,y\in S, \ 1\leqslant i<k\leqslant L.$$

DOWÓD. Najpierw pokażemy, że dla $x,y\in S$ mamy

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \sum_{\lambda\in K} f(\lambda y) - Lf(x) = \sum_{\lambda\in K}\sum_{i=1}^{L-1}\sum_{k=i+1}^{L}\binom{k}{i} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}).$$

Istotnie, zachodzą następujące równości

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \sum_{\lambda\in K} f(\lambda y) - Lf(x) =$$

$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{k=1}^{L}[A_k(x+\lambda y,\dots,x+\lambda y) - A_k(\lambda y,\dots,\lambda y) - A_k(x,\dots,x)] =$$

$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{k=2}^{L}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}) =$$

$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{i=1}^{L-1}\sum_{k=i+1}^{L}\binom{k}{i} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}), \quad x,y\in S.$$

Z powyższej równości otrzymujemy więc, że jeśli

$$\sum_{\lambda\in K} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}) = 0, \quad x,y\in S, \ 1,\leqslant i<k\leqslant L,$$

to funkcja f spełnia (1.2.3).

Załóżmy teraz, że f spełnia równanie (1.2.3). Wówczas

$$\sum_{\lambda\in K}\sum_{i=1}^{L-1}\sum_{k=i+1}^{L}\binom{k}{i} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}) = 0.$$

Dla każdego $i\in\{1,\dots,L-1\}$ definiujemy funkcję $g_i\colon S\times S\to H$ wzorem

$$g_i(x,y) := \sum_{\lambda\in K}\sum_{k=i+1}^{L}\binom{k}{i} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}), \quad x,y\in S.$$

Ponieważ

$$g_i(x,my) = m^i g_i(x,y), \quad m\in\mathbb{N}, \ x,y\in S, \ 1\leqslant i\leqslant L-1,$$

to dla $m \in \mathbb{N}$ oraz $x, y \in S$ mamy

$$\sum_{i=1}^{L-1} m^i g_i(x,y) = \sum_{i=1}^{L-1} g_i(x,my) = 0.$$

Na mocy lematu 1.2.6 otrzymujemy

$$g_i(x,y) = 0, \ x,y \in S, \ i \in \{1,\dots,L-1\}.$$

Teraz, dla każdych $i \in \{1,\dots,L-1\}$, $j \in \{1,\dots,L-i\}$, definiujemy funkcję $h_{i,j}\colon S \times S \to H$ wzorem

$$h_{i,j}(x,y) := \binom{i+j}{i} \sum_{\lambda \in K} A_{i+j}(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}), \ x,y \in S.$$

Ponieważ

$$h_{i,j}(mx,y) = m^j h_{i,j}(x,y), \ m \in \mathbb{N}, \ x,y \in S, \ 1 \leqslant j \leqslant L-i, \ 1 \leqslant i \leqslant L-1,$$

to dla $m \in \mathbb{N}, \ x,y \in S, \ 1 \leqslant i \leqslant L-1$ mamy

$$\sum_{j=1}^{L-i} m^j h_{i,j}(x,y) = \sum_{j=1}^{L-i} h_{i,j}(mx,y) = g_i(mx,y) = 0.$$

Na mocy lematu 1.2.6 otrzymujemy

$$h_{i,j}(x,y) = 0, \ x,y \in S, \ 1 \leqslant j \leqslant L-i, \ 1 \leqslant i \leqslant L-1,$$

a więc

$$\sum_{\lambda \in K} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}) = 0, \ x,y \in S, \ 1 \leqslant i < k \leqslant L,$$

co kończy dowód. □

Pokażemy teraz jaki jest związek pomiędzy rozwiązaniami równania (1.2.3) a operatorem różnicowym Δ.

TWIERDZENIE 1.2.8. *Niech $f\colon S \to H$ spełnia równanie* (1.2.3), *$g\colon S \to H$ będzie dana wzorem*

$$g(x) := -\sum_{i=0}^{L-1} (-1)^{L-i} \sum_{j=1}^{\binom{L}{i}} f\Big(\sum_{\mu \in K_{i,j}} \mu x\Big), \ x \in S,$$

gdzie $K_{i,j} \subset K$ *są parami różnymi zbiorami takimi, że* $|K_{i,j}| = L - i$ *dla* $j \in \{1, \dots, \binom{L}{i}\}$, $i \in \{0, \dots, L\}$. *Wówczas*

$$L\Delta_v^L f(u) = Lg(v), \ u, v \in S.$$

Ponadto

$$g(\lambda x) = g(x), \ \lambda \in K, \ x \in S. \tag{1.2.4}$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że każde rozwiązanie równania (1.2.3) na półgrupie bez elementu neutralnego może być jednoznacznie rozszerzone do rozwiązania określonego na półgrupie z elementem neutralnym 0 przez położenie $f(0) := 0$. Możemy więc założyć, że $(S, +)$ jest monoidem.

Ponieważ dla ustalonych $\lambda \in K$, $i \in \{0, \dots, L\}$ każdemu $j \in \{1, \dots, \binom{L}{i}\}$ możemy wzajemnie jednoznacznie przypisać $k \in \{1, \dots, \binom{L}{i}\}$ w taki sposób, że

$$\lambda K_{i,j} = K_{i,k},$$

to dla $x \in S$ mamy

$$\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}} \sum_{\lambda \in K} f\Big(\sum_{\mu \in K_{i,j}} \lambda\mu x\Big) = \sum_{j=1}^{\binom{L}{i}} \sum_{\lambda \in K} f\Big(\sum_{\mu \in \lambda K_{i,j}} \mu x\Big) = L \sum_{j=1}^{\binom{L}{i}} f\Big(\sum_{\mu \in K_{i,j}} \mu x\Big). \tag{1.2.5}$$

Ustalmy $u, v \in S$. Niech

$$x_i := u + iv, \ y_{i,j} := \sum_{\mu \in K_{i,j}} \mu v, \ j \in \Big\{1, \dots, \binom{L}{i}\Big\}, \ i \in \{0, \dots, L\}.$$

Dla $\lambda \in K$, $i \in \{0, \dots, L\}$, $j \in \{1, \dots, \binom{L}{i}\}$ rozważmy dwa przypadki:

(i) $\lambda^{-1} \in K_{i,j}$.

Stąd $i \neq L$. Niech $k \in \{1, \dots, \binom{L}{i+1}\}$ będzie takie, że $K_{i,j} = K_{i+1,k} \cup \{\lambda^{-1}\}$. Wówczas

$$x_i + \lambda y_{i,j} = u + iv + \sum_{\mu \in K_{i,j}} \lambda\mu v = u + (i+1)v + \sum_{\mu \in K_{i+1,k}} \lambda\mu v = x_{i+1} + \lambda y_{i+1,k}.$$

(ii) $\lambda^{-1} \notin K_{i,j}$.

Stąd $i \neq 0$. Niech $k \in \{1, \dots, \binom{L}{i-1}\}$ będzie takie, że $K_{i-1,k} = K_{i,j} \cup \{\lambda^{-1}\}$. Wówczas

$$x_i + \lambda y_{i,j} = u + iv + \sum_{\mu \in K_{i,j}} \lambda\mu v = u + (i-1)v + \sum_{\mu \in K_{i-1,k}} \lambda\mu v = x_{i-1} + \lambda y_{i-1,k}.$$

Z powyższych rozważań oraz równości (1.2.5) otrzymujemy

$$0=\sum_{i=0}^{L}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}}\sum_{\lambda\in K}f(x_i+\lambda y_{i,j})=\sum_{i=0}^{L}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}}[Lf(x_i)+\sum_{\lambda\in K}f(\lambda y_{i,j})]=$$

$$=L\sum_{i=0}^{L}(-1)^{L-i}\binom{L}{i}f(u+iv)+\sum_{i=0}^{L-1}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}}\sum_{\lambda\in K}f(\sum_{\mu\in K_{i,j}}\lambda\mu v)=$$

$$=L\sum_{i=0}^{L}(-1)^{L-i}\binom{L}{i}f(u+iv)+L\sum_{i=0}^{L-1}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}}f(\sum_{\mu\in K_{i,j}}\lambda\mu v)=L\Delta_v^L f(u)-Lg(v).$$

Pozostaje do pokazania równość (1.2.4). Ustalmy $\lambda\in K$ oraz $i\in\{0,\dots,L\}$. Wówczas dla każdego $j\in\{1,\dots,\binom{L}{i}\}$ istnieje dokładnie jedno takie $k\in\{1,\dots,\binom{L}{i}\}$, że

$$K_{i,j}\lambda=K_{i,k}.$$

Stąd dla $\lambda\in K$, $x\in S$ mamy

$$g(\lambda x)=-\sum_{i=0}^{L-1}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}}f(\sum_{\mu\in K_{i,j}}\mu\lambda x)=-\sum_{i=0}^{L-1}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}}f(\sum_{\mu\in K_{i,j}\lambda}\mu x)=$$

$$=-\sum_{i=0}^{L-1}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}}f(\sum_{\mu\in K_{i,j}}\mu x)=g(x).$$

□

Pełny opis rozwiązań uogólnienia równania Drygasa (1.2.3) podaje następujące

TWIERDZENIE 1.2.9. *Załóżmy, że $(H,+)$ jest jednoznacznie podzielna przez $(L+1)!$. Wówczas funkcja $f\colon S\to H$ spełnia równanie* (1.2.3) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k\colon S^k\to H$, $k\in\{1,\dots,L\}$ takie, że*

$$f(x)=A_1(x)+\ldots+A_L(x,\dots,x),\ x\in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K}A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i})=0,\ x,y\in S,\ 1\leqslant i<k\leqslant L.$$

Ponadto wtedy

$$A_L(\mu x,\dots,\mu x)=A_L(x,\dots,x),\ \mu\in K,\ x\in S.$$

DOWÓD. Twierdzenie to jest konsekwencją twierdzenia 1.2.8, wniosku 1.2.4 i lematu 1.2.7.

□

Kolejne twierdzenie podaje postać rozwiązań uogólnienia równania funkcjonałów kwadratowych.

TWIERDZENIE 1.2.10. *Załóżmy, że $(H,+)$ jest jednoznacznie podzielna przez $(L+1)!$. Wówczas funkcja $f\colon S \to H$ spełnia równanie*

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = Lf(x) + Lf(y), \ x,y \in S \tag{1.2.6}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k\colon S^k \to H$, $k \in \{1,\dots,L\}$ takie, że

$$f(x) = A_1(x) + \ldots + A_L(x,\dots,x), \ x \in S, \tag{1.2.7}$$

$$\sum_{\lambda\in K} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}) = 0, \ x,y \in S, \ 1 \leqslant i < k \leqslant L, \tag{1.2.8}$$

$$A_k(\mu x,\dots,\mu x) = A_k(x,\dots,x), \ x \in S, \ \mu \in K, \ 1 \leqslant k \leqslant L. \tag{1.2.9}$$

DOWÓD. Załóżmy, że f spełnia warunki (1.2.7) – (1.2.9). Z lematu 1.2.7 funkcja f dana wzorem (1.2.7) i spełniająca warunek (1.2.8) spełnia równanie (1.2.3), natomiast warunek (1.2.9) daje nam

$$f(\mu x) = f(x), \ \mu \in K, \ x \in S, \tag{1.2.10}$$

i dalej

$$Lf(y) = \sum_{\lambda\in K} f(\lambda y), \ y \in S.$$

Stąd f spełnia równanie (1.2.6).

Zauważmy, że jeśli f spełnia równanie (1.2.6), to f spełnia równanie (1.2.3) oraz (1.2.10). Istotnie, dla $x,y \in S$, $\mu \in K$ mamy

$$Lf(y) = -Lf(x) + \sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = -Lf(x) + \sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda\mu y) = Lf(\mu y),$$

skąd dostajemy (1.2.10). Dalej $Lf(y) = \sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)$ dla $y \in S$, a więc f spełnia równanie (1.2.3). Na mocy twierdzenia 1.2.9 otrzymujemy warunki (1.2.7) i (1.2.8). Pozostaje pokazać warunek (1.2.9). Ustalmy $\mu \in K$. Zauważmy, że

$$0 = f(\mu x) - f(x) = \sum_{k=1}^{L} [A_k(\mu x,\dots,\mu x) - A_k(x,\dots,x)], \ x \in S.$$

Dla każdego $i \in \{1, \dots, L\}$ definiujemy funkcję $g_i \colon S \to H$ wzorem

$$g_i(x) := A_i(\mu x, \dots, \mu x) - A_i(x, \dots, x), \ x \in S.$$

Ponieważ

$$g_i(mx) = m^i g(x), \ m \in \mathbb{N}, \ x \in S,$$

to dla $m \in \mathbb{N}$, $x \in S$ mamy

$$0 = \sum_{i=1}^{L} g_i(mx) = \sum_{i=1}^{L} m^i g_i(x).$$

Stąd, na mocy lematu 1.2.6, dostajemy

$$g_i(x) = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant L, \ x \in S,$$

co kończy dowód. □

Podamy teraz pełny opis rozwiązań równania będącego uogólnieniem klasycznego równania Jensena.

TWIERDZENIE 1.2.11. *Załóżmy, że $(H, +)$ jest jednoznacznie podzielna przez $L!$. Wówczas funkcja $f \colon S \to H$ spełnia równanie*

$$\sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) = Lf(x), \ x, y \in S \tag{1.2.11}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją k-addytywne, symetryczne odwzorowania $A_k \colon S^k \to H$, $k \in \{1, \dots, L-1\}$ oraz $A_0 \in H$ takie, że

$$f(x) = A_0 + A_1(x) + \ldots + A_{L-1}(x, \dots, x), \ x \in S, \tag{1.2.12}$$

$$\sum_{\lambda \in K} A_k(x, \dots, x, \underbrace{\lambda y, \dots, \lambda y}_{i}) = 0, \ x, y \in S, \ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant L - 1. \tag{1.2.13}$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że jeśli funkcja f spełnia warunki (1.2.12) i (1.2.13), to f spełnia równanie (1.2.11).

Zauważmy także, że każde rozwiązanie równania (1.2.11) na półgrupie bez elementu neutralnego możemy jednoznacznie rozszerzyć do rozwiązania na półgrupie z elementem neutralnym 0. Istotnie, dla $x, y \in S$ mamy

$$L \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y) = \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K} f(\lambda y + \mu x) = \sum_{\mu \in K} \sum_{\lambda \in K} f(\mu x + \lambda y) = L \sum_{\mu \in K} f(\mu x),$$

oraz

$$Lf(\sum_{\lambda\in K}\lambda y) = \sum_{\mu\in K} f(\mu\sum_{\lambda\in K}\lambda y) = \sum_{\mu\in K} f(\mu x).$$

Połóżmy $f(0) := f(\sum_{\lambda\in K}\lambda y)$ dla $y\in S$. Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie rozszerzone w ten sposób spełnia równanie (1.2.11) dla półgrupy $(S\cup\{0\},+)$.

Możemy więc zakładać, że $(S,+)$ jest monoidem. Ponieważ

$$Lf(0) = \sum_{\lambda\in K} f(\lambda y),\ y\in S,$$

to funkcja $f_0 := f - f(0)$ spełnia równanie (1.2.3). Niech $K_{i,j}\subset K$, $j\in\{1,\dots,\binom{L}{i}\}$, $i\in\{0,\dots,L\}$, będą zbiorami określonymi jak w twierdzeniu 1.2.8. Zauważmy, że dla $x\in S$, $j\in\{1,\dots,\binom{L}{i}\}$, $i\in\{0,\dots,L-1\}$ mamy

$$\sum_{\lambda\in K} f_0(\sum_{\mu\in K_{i,j}}\lambda\mu x) = \sum_{\lambda\in K} f(\lambda\sum_{\mu\in K_{i,j}}\mu x) - Lf(0) = 0.$$

Z powyższej równości oraz (1.2.5) otrzymujemy

$$L\sum_{i=0}^{L-1}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}} f_0(\sum_{\mu\in K_{i,j}}\mu x) = \sum_{i=0}^{L-1}(-1)^{L-i}\sum_{j=1}^{\binom{L}{i}}\sum_{\lambda\in K} f_0(\sum_{\mu\in K_{i,j}}\lambda\mu x) = 0,\ x\in S.$$

Wówczas twierdzenie 1.2.8 zachodzi z $g = 0$. Na mocy twierdzenia 1.2.3, lematu 1.2.7 oraz kładąc $A_0 := f(0)$ dostajemy istnienie k-addytywnych i symetrycznych odwzorowań $A_k\colon S^k\to H$, $k\in\{1,\dots,L-1\}$ takich, że zachodzi równość (1.2.12) i warunek

$$\sum_{\lambda\in K} A_k(x,\dots,x,\underbrace{\lambda y,\dots,\lambda y}_{i}) = 0,\ x,y\in S,\ 1\leqslant i<k\leqslant L-1.$$

Pozostaje pokazać, że

$$\sum_{\lambda\in K} A_k(\lambda x,\dots,\lambda x) = 0,\ x\in S,\ 1\leqslant k\leqslant L-1.$$

Dla każdego $i\in\{1,\dots,L-1\}$ definiujemy funkcję $g_i\colon S\to H$ wzorem

$$g_i(x) := \sum_{\lambda\in K} A_i(\lambda x,\dots,\lambda x),\ x\in S.$$

Ponieważ

$$g_i(mx) = m^i g(x),\ m\in\mathbb{N},\ x\in S,\ 1\leqslant i\leqslant L-1,$$

to dla $m \in \mathbb{N}$, $x \in S$ mamy

$$0 = \sum_{\lambda \in K} f(\lambda(mx)) - Lf(0) = \sum_{\lambda \in K} \sum_{i=1}^{L-1} A_i(\lambda(mx), \dots, \lambda(mx)) = \sum_{i=1}^{L-1} g_i(mx) = \sum_{i=1}^{L} m^i g_i(x).$$

Na mocy lematu 1.2.6 otrzymujemy

$$g_i(x) = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant L-1, \ x \in S,$$

co było do udowodnienia. □

Głównym wynikiem tej sekcji jest następujące

TWIERDZENIE 1.2.12. *Załóżmy, że $(S,+)$ jest monoidem, $(H,+)$ jest jednoznacznie podzielna przez $(L+1)!$. Wówczas funkcje $f, g, h\colon S \to H$ spełniają równanie*

$$\sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) = g(x) + h(y), \ x, y \in S \tag{1.2.14}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją k-addytywne, symetryczne odwzorowania $A_k\colon S^k \to H$, $k \in \{1, \dots, L\}$ oraz $A_0, B_0 \in H$ takie, że

$$f(x) = A_0 + A_1(x) + \ldots + A_L(x, \dots, x), \ x \in S, \tag{1.2.15}$$

$$g(x) = B_0 + LA_1(x) + \ldots + LA_L(x, \dots, x), \ x \in S, \tag{1.2.16}$$

$$h(x) = LA_0 - B_0 + \sum_{\lambda \in K} A_1(\lambda x) + \ldots + \sum_{\lambda \in K} A_L(\lambda x, \dots, \lambda x), \ x \in S, \tag{1.2.17}$$

$$\sum_{\lambda \in K} A_k(x, \dots, x, \underbrace{\lambda y, \dots, \lambda y}_{i}) = 0, \ x, y \in S, \ 1 \leqslant i < k \leqslant L. \tag{1.2.18}$$

DOWÓD. Łatwo sprawdzić, że jeśli zachodzą równości (1.2.15) – (1.2.18), to funkcje f, g, h spełniają równanie (1.2.14).
Załóżmy, że funkcje f, g, h spełniają równanie (1.2.14). Zauważmy najpierw, że

$$Lf(0) = g(0) + h(0),$$

$$Lf(x) = g(x) + h(0) = g(x) - g(0) + Lf(0), \ x \in S.$$

Stąd otrzymujemy

$$g(x) = Lf(x) - Lf(0) + g(0), \ x \in S. \tag{1.2.19}$$

Mamy również

$$h(y) = -g(0) + \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y), \ y \in S. \tag{1.2.20}$$

Niech $f_0 := f - f(0)$. Z równości (1.2.19) oraz (1.2.20) mamy

$$\sum_{\lambda \in K} f_0(x + \lambda y) = \sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) - Lf(0) = g(x) + h(y) - Lf(0) =$$
$$= Lf(x) - Lf(0) + g(0) - g(0) + \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y) - Lf(0) = Lf_0(x) + \sum_{\lambda \in K} f_0(\lambda y), \ \ x, y \in S.$$

Na mocy twierdzenia 1.2.9 istnieją k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k \colon S^k \to H$, $k \in \{1, \dots, L\}$ takie, że spełniony jest warunek (1.2.18) oraz

$$f_0(x) = A_1(x) + \ldots + A_L(x, \dots, x), \ \ x \in S.$$

Niech $B_0 := g(0)$, $A_0 := f(0)$. Wówczas z równości (1.2.19) i (1.2.20) otrzymujemy równości (1.2.15) - (1.2.17). $\square$

1.3. Uogólnienie równania funkcjonałów kwadratowych i równania Wilsona

W całym tym podrozdziale będziemy zakładać, że X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $(G, +)$ jest grupą abelową, K jest skończoną, abelową podgrupą grupy automorfizmów G, $L := |K|$.
Zajmiemy się wyznaczeniem rozwiązań $f, g, h\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{C}$ równania postaci

$$\sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) = L\alpha(y)g(x) + Lh(y), \quad x, y \in S.$$

Skorzystamy z twierdzenia dotyczącego funkcji K-sferycznych

TWIERDZENIE 1.3.1 (Shin'ya [**26**, Corollary 3.12], Kannappan [**22**], Czerwik [**12**], Sinopoulos [**27**], Chojnacki [**11**]). *Niech $(G, +)$ będzie abelową grupą topologiczną lokalnie zwartą, Hausdorffa, K będzie zwartą grupą topologiczną Hausdorffa będącą podgrupą automorfizmów na G. Niech dalej μ oznacza unormowaną miarę Haara na K. Jeżeli $\varphi \in C(G)$ jest niezerowym rozwiązaniem równania*

$$\int_K \varphi(x + \lambda y)d\mu(\lambda) = \varphi(x)\varphi(y), \quad x, y \in G,$$

to istnieje ciągły homomorfizm $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ taki, że

$$\varphi(x) = \int_K \chi(\lambda x)d\mu(\lambda), \quad x \in G.$$

Jeżeli φ jest ograniczone, to za χ możemy wziąć ciągły homomorfizm G w okrąg jednostkowy.

Wykorzystamy również następujące lematy

LEMAT 1.3.2. [**2**, Lemma 14.1] *Niech Ω będzie zbiorem niepustym, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas funkcje $f_1, \ldots, f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n \in \Omega$*

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0.$$

LEMAT 1.3.3. [**19**, Lemma 29.41] *Niech G będzie grupą, $n \in \mathbb{N}$, funkcje $\psi_1, \ldots, \psi_n\colon G \to \mathbb{C}^*$ są różnymi homomorfizmami. Wówczas $\psi_1, \ldots, \psi_n$ są liniowo niezależne.*

W celu ułatwienia zapisu wprowadzimy pewne oznaczenia.

DEFINICJA 1.3.4. Niech $m\colon G \to \mathbb{C}^*$ będzie homomorfizmem. Symbolem K_0 oznaczać będziemy zbiór $K_0 := \{\lambda \in K : \ m \circ \lambda = m\}$.

Z definicji tej łatwo dostajemy

LEMAT 1.3.5. *Niech* $m\colon G \to \mathbb{C}^*$ *będzie homomorfizmem. Wówczas zbiór* K_0 *jest podgrupą grupy* K.

DEFINICJA 1.3.6. Niech $m\colon G \to \mathbb{C}^*$ będzie homomorfizmem. Symbolem K_1 oznaczać będziemy zbiór reprezentantów warstw grupy ilorazowej K/K_0 (każda warstwa jest reprezentowana jedynym reprezentantem z K, warstwa K_0 jest reprezentowana przez id).

LEMAT 1.3.7. *Niech* $m\colon G \to \mathbb{C}^*$ *będzie homomorfizmem. Wówczas zbiór* $\{m \circ \lambda : \lambda \in K_1\}$ *jest liniowo niezależny oraz* $K = K_0 \circ K_1$.

DOWÓD. Na mocy lematu 1.3.3 jeśli $\{m \circ \lambda : \lambda \in K_1\}$ byłby liniowo zależny, to $m \circ \lambda = m \circ \mu$ dla pewnych $\lambda, \mu \in K_1$, $\lambda \neq \mu$, a więc $\lambda \circ \mu^{-1} \in K_0$. Stąd $\lambda K_0 = \mu K_0$, co daje nam sprzeczność.

Równość $K = K_0 \circ K_1$ wynika wprost z definicji. □

Pokażemy teraz pewne twierdzenie mówiące nam o postaci i pewnych własnościach funkcji K-sferycznych.

TWIERDZENIE 1.3.8. *Niech* $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$, $\varphi \neq 0$, *spełnia równanie*

$$\sum_{\lambda \in K} \varphi(x + \lambda y) = L\varphi(x)\varphi(y), \quad x, y \in G. \tag{1.3.1}$$

Wówczas istnieją homomorfizm $m\colon G \to \mathbb{C}^*$ *oraz* $\beta_\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b_\lambda \in G$, $\lambda \in K_1$ *takie, że*

$$\varphi(x) = \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} m(\lambda x), \quad x \in G, \tag{1.3.2}$$

$$\sum_{\lambda \in K_1} \beta_\lambda m(\mu b_\lambda) = \begin{cases} |K_1|, & \mu \in K_0, \\ 0, & \mu \notin K_0, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

$$m(x) = \sum_{\lambda \in K_1} \beta_\lambda \varphi(x + b_\lambda), \quad x \in G. \tag{1.3.4}$$

DOWÓD. Biorąc topologię dyskretną na grupie $(G, +)$ oraz miarę liczącą na K podzieloną przez L mamy spełnione założenia twierdzenia 1.3.1. Stąd istnieje homomorfizm $m\colon G \to \mathbb{C}^*$ spełniający (1.3.2).

Na mocy liniowej niezależności zbioru $\{m \circ \lambda : \lambda \in K_1\}$ oraz lematu 1.3.2 istnieją $b_\lambda \in G$, $\lambda \in K_1$ takie, że macierz $[m(\lambda b_\mu)]_{\lambda,\mu \in K_1}$ ma wyznacznik niezerowy. Istnieją więc $\beta_\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda \in K_1$ będące rozwiązaniem układu (1.3.3).

Zauważmy, że

$$m(x) = \frac{1}{|K_0|}\sum_{\mu\in K_0} m(\mu x) = \frac{1}{|K_0|\cdot|K_1|}\sum_{\mu\in K} m(\mu x)\sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda m(\mu b_\lambda) =$$
$$= \sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} m(\mu(x+b_\lambda)) = \sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda\varphi(x+b_\lambda),\ x\in G,$$

co dowodzi (1.3.4). □

Teraz zajmiemy się uogólnieniem równania Wilsona.

W przypadku zespolonym mamy

TWIERDZENIE 1.3.9. *Załóżmy, że X jest zespolona. Odwzorowania $f\colon G\to X$, $f\neq 0$, $\varphi\colon G\to\mathbb{C}$ spełniają równanie*

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = L\varphi(y)f(x),\ x,y\in G, \tag{1.3.5}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizm $m\colon G\to\mathbb{C}^*$, $A_0^\lambda\in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda\colon G^k\to X$, $k\in\{1,\dots,|K_0|-1\}$, $\lambda\in K_1$ takie, że

$$\varphi(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x),\ x\in G, \tag{1.3.6}$$

$$f(x) = \sum_{\lambda\in K_1} m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)],\ x\in G, \tag{1.3.7}$$

$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant|K_0|-1. \tag{1.3.8}$$

DOWÓD. Pokażemy najpierw, że powyższe funkcje spełniają równanie (1.3.5). Załóżmy, że funkcje f i φ są określone wzorami (1.3.6), (1.3.7) oraz spełniają warunek (1.3.8). Zdefiniujmy funkcje $g_\mu\colon G\to X$, $\mu\in K_1$ wzorem

$$g_\mu(x) := A_0^\mu + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\mu(x,\dots,x),\ x\in G,\ \mu\in K_1.$$

Na mocy twierdzenia 1.2.11 dla każdego $\mu\in K_1$ odwzorowanie g_μ spełnia równanie

$$\sum_{\sigma\in K_0} g_\mu(x+\sigma y) = |K_0|g_\mu(x),\ x\in G.$$

Stąd mamy

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1} m(\mu(x+\lambda y))g_\mu(x+\lambda y) =$$
$$= \sum_{\lambda\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\mu\in K_1} m(\mu x)m(\mu\sigma\lambda y)g_\mu(x+\sigma\lambda y) = \sum_{\lambda\in K_1}\sum_{\mu\in K_1} m(\mu x)m(\mu\lambda y)\sum_{\sigma\in K_0} g_\mu(x+\sigma\lambda y) =$$

$$= \sum_{\lambda\in K_1}\sum_{\mu\in K_1} m(\mu x)m(\mu\lambda y)|K_0|g_\mu(x) = \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1} m(\mu x)m(\mu\lambda y)g_\mu(x) =$$
$$= L\varphi(y)\sum_{\mu\in K_1} m(\mu x)g_\mu(x) = L\varphi(y)f(x), \ x\in G.$$

Załóżmy, że f i φ spełniają równanie (1.3.5). Ponieważ $f\neq 0$, to $\varphi\neq 0$. Zauważmy, że dla $x,y,z\in G$ mamy

$$L\sum_{\mu\in K}\varphi(y+\mu z)f(x) = \sum_{\mu\in K}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda(y+\mu z)) = \sum_{\mu\in K}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y+\mu z) =$$
$$= \sum_{\lambda\in K} L\varphi(z)f(x+\lambda y) = L^2\varphi(z)\varphi(y)f(x).$$

Biorąc taki $x\in G$, że $f(x)\neq 0$ otrzymujemy, że φ spełnia równanie (1.3.1). Z poprzedniego twierdzenia dostajemy (1.3.6). Również korzystając z poprzedniego twierdzenia zauważmy, że

$$|K_1|\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma y) = \sum_{\rho\in K} m(\rho y)\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu f(x+\rho^{-1}b_\nu), \ x,y\in G. \tag{1.3.9}$$

Istotnie, mamy

$$|K_1|\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma y) = \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu m(\lambda b_\mu)f(x+\lambda y) =$$
$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\mu\beta_\nu\varphi(\lambda b_\mu+b_\nu)f(x+\lambda y) =$$
$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\rho\in K}\frac{1}{L}\beta_\mu\beta_\nu f(x+\lambda y+\rho\lambda b_\mu+\rho b_\nu) =$$
$$= \sum_{\rho\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\mu\beta_\nu\varphi(y+\rho b_\mu)f(x+\rho b_\nu) =$$
$$= \sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu m(\rho^{-1}y)f(x+\rho b_\nu) = \sum_{\rho\in K} m(\rho y)\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu f(x+\rho^{-1}b_\nu), \ x,y\in G,$$

co pokazuje, że f i φ spełniają równanie (1.3.1).

Dla każdego $\tau\in K_1$ zdefiniujmy funkcję $g_\tau\colon G\to X$ wzorem

$$g_\tau(x) := \frac{1}{Lm(\tau x)}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \ x\in G.$$

Stosując równość (1.3.9) otrzymujemy

$$Lm(\tau x+\tau y)\sum_{\sigma\in K_0} g_\tau(x+\sigma y) = \sum_{\sigma\in K_0} Lm(\tau(x+\sigma y))g_\tau(x+\sigma y) =$$
$$= \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\rho\in K_0} f(x+\sigma y+\rho\tau^{-1}b_\nu) = \sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\rho\in K_0}\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma y+\sigma\rho\tau^{-1}b_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\rho\in K_0}\frac{1}{|K_1|}\sum_{\mu\in K} m(\mu(y+\rho\tau^{-1}b_\nu))\sum_{\sigma\in K_1}\beta_\sigma f(x+\mu^{-1}b_\sigma) =$$

$$= \sum_{\mu\in K} m(\mu y) \sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu \sum_{\rho\in K_0} \frac{1}{|K_1|} m(\mu\rho\tau^{-1}b_\nu) \sum_{\sigma\in K_1} \beta_\sigma f(x+\mu^{-1}b_\sigma) =$$
$$= \sum_{\mu\in K} m(\mu y) \frac{|K_0|}{|K_1|} \sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu m(\mu\tau^{-1}b_\nu) \sum_{\sigma\in K_1} \beta_\sigma f(x+\mu^{-1}b_\sigma) =$$
$$= |K_0| \sum_{\mu\in K_0} m(\mu\tau y) \sum_{\sigma\in K_1} \beta_\sigma f(x+\tau^{-1}\mu^{-1}b_\sigma) =$$
$$= |K_0| m(\tau y) \sum_{\sigma\in K_1} \beta_\sigma \sum_{\mu\in K_0} f(x+\mu\tau^{-1}b_\sigma) = |K_0| \cdot Lm(\tau y)m(\tau x)g_\tau(x),\ x\in G,\ \tau\in K_1.$$

Stąd

$$\sum_{\sigma\in K_0} g_\tau(x+\sigma y) = |K_0| g_\tau(x),\ x\in G,\ \tau\in K_1. \tag{1.3.10}$$

Na mocy twierdzenia 1.2.11 dla każdego $\lambda\in K_1$ istnieją k-addytywne, symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda\colon S^k\to X$, $k\in\{1,\dots,|K_0|-1\}$ i $A_0^\lambda\in X$ takie, że

$$g_\lambda(x) = A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x),\ x\in G,$$
$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0,\ x,y\in G,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1.$$

Zauważmy, że

$$L\sum_{\lambda\in K_1} m(\lambda x)g_\lambda(x) = \sum_{\lambda\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\lambda^{-1}b_\nu) = \sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu \sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda b_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu L\varphi(b_\nu) f(x) = Lm(0)f(x) = Lf(x),\ x\in G,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Dla przypadku rzeczywistego mamy

TWIERDZENIE 1.3.10. *Załóżmy, że X jest rzeczywista. Odwzorowania $f\colon G\to X$, $f\neq 0$, $\varphi\colon G\to\mathbb{R}$ spełniają równanie*

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = L\varphi(y)f(x),\ x,y\in G, \tag{1.3.11}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizm $m\colon G\to\mathbb{C}^*$, $A_0^\lambda, B_0^\lambda\in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda, B_k^\lambda\colon G^k\to X$, $k\in\{1,\dots,|K_0|-1\}$, $\lambda\in K_1$ takie, że

$$\varphi(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x),\ x\in G, \tag{1.3.12}$$

$$f(x) = \sum_{\lambda\in K_1} (Re\ m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)]+$$

$$- Im\ m(\lambda x)[B_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x,\dots,x)]),\ x\in G, \tag{1.3.13}$$

$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1, \tag{1.3.14}$$

$$\sum_{\mu\in K_0} B_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1. \tag{1.3.15}$$

DOWÓD. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia łatwo sprawdzić, że funkcje określone wzorami (1.3.12), (1.3.13), spełniające warunek (1.3.14) spełniają równanie (1.3.11). Załóżmy, że f i φ spełniają równanie (1.3.11). Ponieważ $f\neq 0$, to $\varphi\neq 0$. Zauważmy, że dla $x,y,z\in G$ mamy

$$L\sum_{\mu\in K}\varphi(y+\mu z)f(x) = \sum_{\mu\in K}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda(y+\mu z)) = \sum_{\mu\in K}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y+\mu z) =$$

$$= \sum_{\lambda\in K} L\varphi(z)f(x+\lambda y) = L^2\varphi(z)\varphi(y)f(x).$$

Biorąc $x\in G$ taki, że $f(x)\neq 0$ otrzymujemy, że φ spełnia równanie (1.3.1). Zachodzi więc teza twierdzenia 1.3.8, skąd dostajemy (1.3.12), a także korzystając z (1.3.3) i (1.3.4) otrzymujemy

$$|K_1|\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma y) = \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\nu m(\rho y))\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1}b_\nu),\ x,y\in G, \tag{1.3.16}$$

$$0 = \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\nu m(\rho y))\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1}b_\nu),\ x,y\in G. \tag{1.3.17}$$

Istotnie, dla $x,y\in G$ mamy

$$|K_1|\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma y) = \sum_{\lambda\in K} \mathrm{Re}\ (\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu m(\lambda b_\mu))f(x+\lambda y) =$$

$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\mu\beta_\nu)\varphi(\lambda b_\mu + b_\nu)f(x+\lambda y) =$$

$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\rho\in K}\frac{1}{L}\mathrm{Re}\ (\beta_\mu\beta_\nu)f(x+\lambda y+\rho\lambda b_\mu+\rho b_\nu) =$$

$$= \sum_{\rho\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\mu\beta_\nu)\varphi(y+\rho b_\mu)f(x+\rho b_\nu) =$$

$$= \sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\nu m(\rho^{-1}y))f(x+\rho b_\nu) =$$

$$= \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\nu m(\rho y))\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1}b_\nu),$$

a także

$$0 = \sum_{\lambda\in K} \mathrm{Im}\ (\sum_{\mu\in K_1} \beta_\mu m(\lambda b_\mu)) f(x+\lambda y) =$$
$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)\varphi(\lambda b_\mu + b_\nu) f(x+\lambda y) =$$
$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\rho\in K} \frac{1}{L}\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu) f(x+\lambda y+\rho\lambda b_\mu+\rho b_\nu) =$$
$$= \sum_{\rho\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)\varphi(y+\rho b_\mu) f(x+\rho b_\nu) =$$
$$= \sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\nu m(\rho^{-1}y)) f(x+\rho b_\nu) =$$
$$= \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\nu m(\rho y)) \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1}b_\nu),$$

Dla każdego $\tau \in K_1$ zdefiniujmy funkcje $g_\tau, h_\tau\colon G \to X$ wzorami

$$g_\tau(x) := \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau x)} \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu),\ x\in G,$$
$$h_\tau(x) := \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau x)} \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu),\ x\in G.$$

Stosując (1.3.16) i (1.3.17) otrzymujemy

$$\sum_{\sigma\in K_0} g_\tau(x+\sigma y) = |K_0| g_\tau(x),\ x,y\in G,\ \tau\in K_1, \tag{1.3.18}$$
$$\sum_{\sigma\in K_0} h_\tau(x+\sigma y) = |K_0| h_\tau(x),\ x,y\in G,\ \tau\in K_1. \tag{1.3.19}$$

Istotnie, mamy

$$|K_1| \sum_{\lambda\in K_0} g_\tau(x+\lambda y) = |K_1| \sum_{\lambda\in K_0}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+\lambda y))} \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\lambda y+\sigma\tau^{-1}b_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0} |K_1| \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu)) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\rho\in K_1}\sum_{\mu\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\mu m(\rho(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\rho^{-1}b_\mu) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{|K_0|\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\mu\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\mu m(\rho y) m(\rho\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\rho^{-1}b_\mu) +$$
$$- \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ \frac{|K_0|\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\mu\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\mu m(\rho y) m(\rho\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\rho^{-1}b_\mu) =$$
$$= |K_0| \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\mu\in K_1} \mathrm{Re}\ (\frac{\beta_\mu m(\rho y)}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu m(\rho\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\rho^{-1}b_\mu) =$$

$$= |K_0| \cdot |K_1| \sum_{\mu \in K_1} \text{Re } (\frac{\beta_\mu m(\tau y)}{Lm(\tau(x+y))}) \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda\tau^{-1}b_\mu) =$$

$$= |K_0| \cdot |K_1| \sum_{\mu \in K_1} \text{Re } \frac{\beta_\mu}{Lm(\tau x)} \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda\tau^{-1}b_\mu) = |K_0| \cdot |K_1| g_\tau(x), \ x \in G.$$

Podobnie

$$|K_1| \sum_{\lambda \in K_0} h_\tau(x + \lambda y) = |K_1| \sum_{\lambda \in K_0} \sum_{\nu \in K_1} \text{Im } \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+\lambda y))} \sum_{\sigma \in K_0} f(x + \lambda y + \sigma\tau^{-1}b_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu \in K_1} \text{Im } \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma \in K_0} |K_1| \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda(y + \sigma\tau^{-1}b_\nu)) =$$

$$= \sum_{\nu \in K_1} \text{Im } \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma \in K_0} \sum_{\rho \in K_1} \sum_{\mu \in K_1} \text{Re } (\beta_\mu m(\rho(y + \sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda\rho^{-1}b_\mu) =$$

$$= \sum_{\nu \in K_1} \text{Im } \frac{|K_0|\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\rho \in K_1} \sum_{\mu \in K_1} \text{Re } (\beta_\mu m(\rho y) m(\rho\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda\rho^{-1}b_\mu) +$$

$$+ \sum_{\nu \in K_1} \text{Re } \frac{|K_0|\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\rho \in K_1} \sum_{\mu \in K_1} \text{Im } (\beta_\mu m(\rho y) m(\rho\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda\rho^{-1}b_\mu) =$$

$$= |K_0| \sum_{\rho \in K_1} \sum_{\mu \in K_1} \text{Im } (\frac{\beta_\mu m(\rho y)}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\nu m(\rho\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda\rho^{-1}b_\mu) =$$

$$= |K_0| \cdot |K_1| \sum_{\mu \in K_1} \text{Im } (\frac{\beta_\mu m(\tau y)}{Lm(\tau(x+y))}) \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda\tau^{-1}b_\mu) =$$

$$= |K_0| \cdot |K_1| \sum_{\mu \in K_1} \text{Im } \frac{\beta_\mu}{Lm(\tau x)} \sum_{\lambda \in K_0} f(x + \lambda\tau^{-1}b_\mu) = |K_0| \cdot |K_1| h_\tau(x), \ x \in G.$$

Na mocy twierdzenia 1.2.11 dla każdego $\lambda \in K_1$ istnieją k-addytywne, symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda, B_k^\lambda \colon S^k \to X$, $k \in \{1, \dots, |K_0| - 1\}$ i $A_0^\lambda, B_0^\lambda \in X$ takie, że

$$g_\lambda(x) = A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x, \dots, x), \ x \in G,$$

$$\sum_{\mu \in K_0} A_k^\lambda(x, \dots, x, \underbrace{\mu y, \dots, \mu y}_{i}) = 0, \ x, y \in G, \ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0| - 1,$$

$$h_\lambda(x) = B_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x, \dots, x), \ x \in G,$$

$$\sum_{\mu \in K_0} B_k^\lambda(x, \dots, x, \underbrace{\mu y, \dots, \mu y}_{i}) = 0, \ x, y \in G, \ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0| - 1.$$

Zauważmy, że

$$\sum_{\tau \in K_1} \text{Re } m(\tau x) g_\tau(x) - \sum_{\tau \in K_1} \text{Im } m(\tau x) h_\tau(x) =$$

$$= \sum_{\tau\in K_1} [\mathrm{Re}\, m(\tau x) \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau x)} \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu)+$$
$$- \mathrm{Im}\, m(\tau x) \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau x)} \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu)] =$$
$$= \sum_{\tau\in K_1} \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\, (m(\tau x)\frac{\beta_\nu}{Lm(\tau x)}) \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu) =$$
$$= \sum_{\tau\in K_1} \sum_{\sigma\in K_0} \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\, (\frac{\beta_\nu}{L}) f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu) = \sum_{\lambda\in K} \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\, (\frac{\beta_\nu}{L}) f(x+\lambda b_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\, \beta_\nu\varphi(b_\nu) f(x) = m(0)f(x) = f(x), \ x\in G,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Z powyższych dwóch twierdzeń mamy następujący

WNIOSEK 1.3.11. *Odwzorowania $f,g\colon G\to X$, $\varphi\colon G\to\mathbb{K}$, $f\neq 0$ spełniają równanie*

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = L\varphi(y)g(x), \ x,y\in G, \tag{1.3.20}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $m\colon G\to\mathbb{C}^*$ taki, że

$$\varphi(x) = \varphi(0)\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x), \ x\in G,$$

oraz

(i) jeżeli X jest rzeczywista, to istnieją $A_0^\lambda, B_0^\lambda\in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda, B_k^\lambda\colon G^k\to X$, $k\in\{1,\dots,|K_0|-1\}$, $\lambda\in K_1$ takie, że

$$f(x) = \varphi(0)\sum_{\lambda\in K_1}(Re\, m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)]+$$
$$- Im\, m(\lambda x)[B_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x,\dots,x)]), \ x\in G,$$
$$g(x) = \sum_{\lambda\in K_1}(Re\, m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)]+$$
$$- Im\, m(\lambda x)[B_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x,\dots,x)]), \ x\in G,$$
$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0, \ x,y\in G, \ \lambda\in K_1, \ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1,$$
$$\sum_{\mu\in K_0} B_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0, \ x,y\in G, \ \lambda\in K_1, \ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1,$$

(ii) jeżeli X jest zespolona, to istnieją $A_0^\lambda \in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda \colon G^k \to X$, $k \in \{1,\dots,|K_0|-1\}$, $\lambda \in K_1$ takie, że

$$f(x) = \varphi(0) \sum_{\lambda \in K_1} m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)],\ x \in G,$$

$$g(x) = \sum_{\lambda \in K_1} m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)],\ x \in G,$$

$$\sum_{\mu \in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0,\ x,y \in G,\ \lambda \in K_1,\ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0|-1.$$

DOWÓD. Biorąc $y = 0$ w (1.3.20) mamy

$$Lf(x) = L\varphi(0)g(x),\ x \in G.$$

Ponieważ $f \neq 0$, to $g \neq 0$ i $\varphi(0) \neq 0$ oraz

$$\varphi(0) \sum_{\lambda \in K} g(x + \lambda y) = L\varphi(y)g(x),\ x,y \in G,$$

skąd dla $\varphi_0 := \frac{\varphi}{\varphi(0)}$ mamy

$$\sum_{\lambda \in K} g(x + \lambda y) = L\varphi_0(y)g(x),\ x,y \in G,$$

Na mocy twierdzeń 1.3.9 oraz 1.3.10 otrzymujemy odpowiednio (ii) i (i) tezę. □

Wyznaczymy teraz postać rozwiązań równania uogólniającego równanie Wilsona i Drygasa.

TWIERDZENIE 1.3.12. *Odwzorowania $f \colon G \to X$, $\varphi \colon G \to \mathbb{K}$, $f \neq 0$, $\varphi \neq const$ spełniają równanie*

$$\sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) = L\varphi(y)f(x) + \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y),\ x,y \in G, \tag{1.3.21}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $m \colon G \to \mathbb{C}^*$ taki, że

$$\varphi(x) = \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} m(\lambda x),\ x \in G,$$

oraz

(i) jeżeli X jest rzeczywista, to istnieją $A_0^\lambda, B_0^\lambda \in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania

$A_k^\lambda, B_k^\lambda \colon G^k \to X$, $k \in \{1, \dots, |K_0| - 1\}$, $\lambda \in K_1$ *takie, że*

$$f(x) = \sum_{\lambda \in K_1} (Re\ m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x, \dots, x)] +$$

$$- Im\ m(\lambda x)[B_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x, \dots, x)]) - \sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda,\ x \in G,$$

$$\sum_{\mu \in K_0} A_k^\lambda(x, \dots, x, \underbrace{\mu y, \dots, \mu y}_{i}) = 0,\ x, y \in G,\ \lambda \in K_1,\ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0| - 1,$$

$$\sum_{\mu \in K_0} B_k^\lambda(x, \dots, x, \underbrace{\mu y, \dots, \mu y}_{i}) = 0,\ x, y \in G,\ \lambda \in K_1,\ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0| - 1,$$

(ii) jeżeli X jest zespolona, to istnieją $A_0^\lambda \in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda \colon G^k \to X$, $i \in \{1, \dots, |K_0| - 1\}$, $\lambda \in K_1$ takie, że

$$f(x) = \sum_{\lambda \in K_1} m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x, \dots, x)] - \sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda,\ x \in G,$$

$$\sum_{\mu \in K_0} A_k^\lambda(x, \dots, x, \underbrace{\mu y, \dots, \mu y}_{i}) = 0,\ x, y \in G,\ \lambda \in K_1,\ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0| - 1.$$

Ponadto

$$\sum_{\lambda \in K} f(\lambda x) = L(\varphi(x) - 1) \sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda,\ x \in G. \tag{1.3.22}$$

DOWÓD. Biorąc $x = 0$ w (1.3.21) mamy

$$\sum_{\lambda \in K} f(\lambda y) = L\varphi(y) f(0) + \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y),\ y \in G.$$

Ponieważ $\varphi \neq const$, to $f(0) = 0$. Biorąc $y = 0$ w (1.3.21) mamy

$$Lf(x) = L\varphi(0) f(x) + Lf(0),\ x \in G,$$

skąd dostajemy $\varphi(0) = 1$. Zauważmy, że

$$L\varphi(x) \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y) + L \sum_{\lambda \in K} f(\lambda x) = \sum_{\mu \in K} \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y + \mu x) =$$

$$= \sum_{\mu \in K} \sum_{\lambda \in K} f(\mu x + \lambda y) = L\varphi(y) \sum_{\mu \in K} f(\mu x) + L \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y),\ x, y \in G,$$

skąd mamy

$$L(\varphi(y) - 1) \sum_{\mu \in K} f(\mu x) = L(\varphi(x) - 1) \sum_{\lambda \in K} f(\lambda y),\ x, y \in G,$$

czyli

$$\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y) = L(\varphi(y)-1)A_0,\ y\in G, \tag{1.3.23}$$

dla pewnej stałej $A_0 \in X$. Stąd dostajemy, że funkcja $f \neq const$. Wstawiając powyższą zależność do (1.3.21) otrzymujemy

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = L\varphi(y)f(x) + L(\varphi(y)-1)A_0,\ x,y\in G,$$

a stąd określając funkcję $g\colon G\to X$ wzorem $g := f + A_0$ dostajemy

$$\sum_{\lambda\in K} g(x+\lambda y) = L\varphi(y)g(x),\ x,y\in G.$$

Korzystając z twierdzenia 1.3.9 i 1.3.10 istnieje homomorfizm $m\colon G\to\mathbb{C}^*$ taki, że

$$\varphi(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x),\ x\in G,$$

oraz

(i) w przypadku gdy X jest rzeczywista, istnieją $A_0^\lambda, B_0^\lambda \in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda, B_k^\lambda\colon G^k\to X$, $k\in\{1,\dots,|K_0|-1\}$, $\lambda\in K_1$ takie, że

$$\begin{aligned} g(x) = \sum_{\lambda\in K_1} (\mathrm{Re}\, m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)]+ \\ - \mathrm{Im}\, m(\lambda x)[B_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x,\dots,x)]),\ x\in G, \end{aligned}$$

$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1,$$

$$\sum_{\mu\in K_0} B_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1,$$

(ii) w przypadku gdy X jest zespolona, istnieją $A_0^\lambda \in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda\colon G^k\to X$, $k\in\{1,\dots,|K_0|-1\}$, $\lambda\in K_1$ takie, że

$$g(x) = \sum_{\lambda\in K_1} m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)],\ x\in G,$$

$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1,$$

a ponieważ $f(0) = 0$ i $g = f + A_0$, to w rzeczywistym i zespolonym przypadku przestrzeni X mamy

$$A_0 = g(0) = \sum_{\lambda \in K_1} A_0^{\lambda},$$

co razem z równością (1.3.23) pociąga (1.3.22) oraz daje nam postać funkcji f. □

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy postać rozwiązań wspólnego uogólnienia równania Wilsona i równania funkcjonałów kwadratowych.

WNIOSEK 1.3.13. *Odwzorowania* $f\colon G \to X$, $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$, $f \neq 0$, $\varphi \neq const$ *spełniają równanie*

$$\sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) = L\varphi(y)f(x) + Lf(y), \quad x, y \in G, \tag{1.3.24}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizm $m\colon G \to \mathbb{C}^*$ *oraz* $A \in X$ *takie, że*

$$\varphi(x) = \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} m(\lambda x), \quad x \in G,$$

$$f(x) = (\varphi(x) - 1)A, \quad x \in G.$$

DOWÓD. Łatwo sprawdzić, że jeśli funkcje f i φ spełniają powyższe warunki, to spełniają równanie (1.3.24).

Załóżmy, że f i φ spełniają równanie (1.3.24). Biorąc $x = 0$ w (1.3.24) mamy

$$\sum_{\lambda \in K} f(\lambda y) = L\varphi(y)f(0) + Lf(y), \quad y \in G.$$

Kładąc $y = 0$ w (1.3.24) mamy

$$Lf(x) = L\varphi(0)f(x) + Lf(0), \quad x \in G.$$

Jeśli $\varphi(0) = 0$, to $f = f(0)$ i z powyższych równości $f = 0$ co daje sprzeczność. Stąd, ponieważ $\varphi \neq const$, to $f(0) = 0$ oraz $\varphi(0) = 1$, a także $\sum_{\lambda \in K} f(\lambda y) = Lf(y)$. W szczególności funkcja f spełnia równanie (1.3.21). Korzystając z poprzedniego twierdzenia mamy więc

$$Lf(x) = \sum_{\mu \in K} f(\mu x) = L(\varphi(x) - 1)A, \quad x, y \in G,$$

dla pewnej stałej $A \in X$. □

Głównym wynikiem tej sekcji jest następujące

TWIERDZENIE 1.3.14. *Odwzorowania $f, g, h\colon G \to X$, $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$, $f \neq 0$, $\varphi \neq const$, $\varphi(0) \neq 0$, spełniają równanie*

$$\sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) = L\varphi(y)g(x) + Lh(y), \ x, y \in G, \tag{1.3.25}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizm $m\colon G \to \mathbb{C}^*$, $A, B \in X$ takie, że

$$\varphi(x) = \varphi(0)\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} m(\lambda x), \ x \in G,$$

oraz

(i) w przypadku gdy X jest rzeczywista, istnieją $A_0^\lambda, B_0^\lambda \in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda, B_k^\lambda\colon G^k \to X$, $k \in \{1, \dots, |K_0| - 1\}$, $\lambda \in K_1$ takie, że

$$f(x) = \varphi(0)\sum_{\lambda \in K_1}(Re\, m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x, \dots, x)] +$$
$$- Im\, m(\lambda x)[B_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x, \dots, x)]) + A - \varphi(0)\sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda, \ x \in G,$$

$$g(x) = \sum_{\lambda \in K_1}(Re\, m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x, \dots, x)] +$$
$$- Im\, m(\lambda x)[B_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x, \dots, x)]) + B - \sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda, \ x \in G,$$

$$h(x) = \varphi(x)(\sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda - B) + (A - \varphi(0)\sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda), \ x \in G,$$

$$\sum_{\mu \in K_0} A_k^\lambda(x, \dots, x, \underbrace{\mu y, \dots, \mu y}_{i}) = 0, \ x, y \in G, \ \lambda \in K_1, \ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0| - 1,$$

$$\sum_{\mu \in K_0} B_k^\lambda(x, \dots, x, \underbrace{\mu y, \dots, \mu y}_{i}) = 0, \ x, y \in G, \ \lambda \in K_1, \ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0| - 1,$$

(ii) w przypadku gdy X jest zespolona, istnieją $A_0^\lambda \in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda\colon G^k \to X$, $k \in \{1, \dots, |K_0| - 1\}$, $\lambda \in K_1$ takie, że

$$f(x) = \varphi(0)\sum_{\lambda \in K_1} m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x, \dots, x)] + A - \varphi(0)\sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda, \ x \in G,$$

$$g(x) = \sum_{\lambda \in K_1} m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x, \dots, x)] + B - \sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda, \ x \in G,$$

$$h(x) = \varphi(x)(\sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda - B) + (A - \varphi(0)\sum_{\lambda \in K_1} A_0^\lambda), \ x \in G,$$

$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i})=0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1.$$

DOWÓD. Biorąc $x=0$ w (1.3.25) otrzymujemy

$$\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)=L\varphi(y)g(0)+Lh(y),\ y\in G.$$

Kładąc $y=0$ w (1.3.25) mamy

$$Lf(x)=L\varphi(0)g(x)+Lh(0),\ x\in G.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\varphi(0)\sum_{\lambda\in K} g(x+\lambda y)&=\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y)-Lh(0)=\\&=L\varphi(y)g(x)+Lh(y)-Lh(0)=L\varphi(y)g(x)+\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)-L\varphi(y)g(0)-Lh(0)=\\&=L\varphi(y)(g(x)-g(0))+\varphi(0)\sum_{\lambda\in K} g(\lambda y),\ x,y\in G,\end{aligned}$$

a więc funkcje $g_0=g-g(0)$, $\varphi_0=\frac{\varphi}{\varphi(0)}$ spełniają równanie

$$\sum_{\lambda\in K} g_0(x+\lambda y)=L\varphi_0(y)g_0(x)+\sum_{\lambda\in K} g_0(\lambda y),\ x,y\in G.$$

Na mocy twierdzenia 1.3.12 istnieje homomorfizm $m\colon G\to\mathbb{C}^*$ taki, że

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x),\ x\in G,$$

oraz

(i) w przypadku gdy X jest rzeczywista, istnieją $A_0^\lambda, B_0^\lambda\in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda, B_k^\lambda\colon G^k\to X$, $k\in\{1,\dots,|K_0|-1\}$, $\lambda\in K_1$ takie, że

$$\begin{aligned}g_0(x)=\sum_{\lambda\in K_1}\Big(&\operatorname{Re} m(\lambda x)[A_0^\lambda+\sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)]+\\&-\operatorname{Im} m(\lambda x)[B_0^\lambda+\sum_{i=1}^{|K_0|-1} B_i^\lambda(x,\dots,x)]\Big)-\sum_{\lambda\in K_1} A_0^\lambda,\ x\in G,\end{aligned}$$

$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i})=0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1,$$

$$\sum_{\mu\in K_0} B_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i})=0,\ x,y\in G,\ \lambda\in K_1,\ 1\leqslant i\leqslant k\leqslant |K_0|-1,$$

(ii) w przypadku gdy X jest zespolona, istnieją $A_0^\lambda \in X$, k-addytywne i symetryczne odwzorowania $A_k^\lambda\colon G^k \to X$, $k \in \{1,\dots,|K_0|-1\}$, $\lambda \in K_1$ takie, że

$$g_0(x) = \sum_{\lambda\in K_1} m(\lambda x)[A_0^\lambda + \sum_{i=1}^{|K_0|-1} A_i^\lambda(x,\dots,x)] - \sum_{\lambda\in K_1} A_0^\lambda, \ x \in G,$$

$$\sum_{\mu\in K_0} A_k^\lambda(x,\dots,x,\underbrace{\mu y,\dots,\mu y}_{i}) = 0, \ x,y \in G, \ \lambda \in K_1, \ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant |K_0|-1,$$

Ponadto

$$\sum_{\lambda\in K} g_0(\lambda x) = L(\varphi_0(x)-1)\sum_{\lambda\in K_1} A_0^\lambda, \ x \in G.$$

Stąd, przyjmując $B := g(0)$, otrzymujemy postać φ i g. Ponieważ

$$Lf(x) = L\varphi(0)g(x) + Lh(0) = L\varphi(0)g_0(x) + Lf(0), \ x \in G,$$

to przyjmując $A := f(0)$ otrzymujemy postać f.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} Lh(x) &= \sum_{\lambda\in K} f(\lambda x) - L\varphi(x)g(0) = \varphi(0)\sum_{\lambda\in K} g(\lambda x) + Lh(0) - L\varphi(x)g(0) = \\ &= \varphi(0)\sum_{\lambda\in K} g_0(\lambda x) + Lf(0) - L\varphi(x)g(0) = L(\varphi(x)-\varphi(0))\sum_{\lambda\in K_1} A_0^\lambda + \\ &\quad + LA - L\varphi(x)B = L\varphi(x)(\sum_{\lambda\in K_1} A_0^\lambda - B) + L(A - \varphi(0)\sum_{\lambda\in K_1} A_0^\lambda), \ x \in G, \end{aligned}$$

co pokazuje postać h i kończy dowód. □

ROZDZIAŁ 2

Stabilność uogólnienia równania funkcjonałów kwadratowych i równania Wilsona

2.1. Wstęp

Problem stabilności pojawił się w roku 1940 wraz z pytaniem S.M. Ulama:

> Dane są grupa G_1, grupa metryczna (G_2, d), liczba $\varepsilon > 0$ i odwzorowanie $f\colon G_1 \to G_2$ które spełniają nierówność $d(f(xy), f(x)f(y)) < \varepsilon$ dla wszystkich $x, y \in G_1$. Czy istnieje wtedy homomorfizm $h\colon G_1 \to G_2$ oraz stała $k > 0$, zależna tylko od G_1 i G_2 takie, że $d(f(x), h(x)) \leqslant k\varepsilon$ dla wszystkich $x \in G_1$?

Częściową i pozytywną odpowiedź udzielił rok później D.H. Hyers ([**20**]) zakładając, że G_1 i G_2 są przestrzeniami Banacha. Wynik Hyersa uogólnili niezależnie T. Aoki ([**3**]) oraz Th.M. Rassias ([**25**]).

TWIERDZENIE 2.1.1. *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $p < 1$, $\theta \geqslant 0$ będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Jeżeli $f\colon X \to Y$ spełnia nierówność*

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leqslant \theta(||x||^p + ||y||^p), \ x, y \in X \ (x, y \in X \setminus \{0\} \ gdy \ p < 0),$$

to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie addytywne $T\colon X \to Y$ takie, że

$$||f(x) - T(x)|| \leqslant \frac{2\theta}{|2 - 2^p|}||x||^p, \ x \in X \ (x \in X \setminus \{0\} \ gdy \ p < 0).$$

Ponadto, jeżeli $t \mapsto f(tx)$ jest ciągłe dla każdego ustalonego $x \in X$, to T jest liniowe.

Następnie Z. Gajda ([**15**]) udowodnił analogiczne twierdzenie dla $p > 1$ i pokazał, że dla $p = 1$ podobny wynik nie zachodzi. R. Ger ([**18**]), B. E. Johnson ([**21**]) oraz P. Šemrl ([**34**]) zajęli się tym krytycznym przypadkiem i zastępując funkcję kontrolną $(x, y) \mapsto \theta(||x|| + ||y||)$ innymi odwzorowaniami wykazali stabilność.
W roku 1994, P. Gavrută ([**17**]) udowodnił dalsze uogólnienie, zastępując odwzorowanie $(x, y) \mapsto \theta(||x||^p + ||y||^p)$ funkcją $\varphi(x, y)$ spełniającym warunki:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\varphi(2^n x, 2^n y) < \infty$ lub $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \varphi(2^{-n-1}x, 2^{-n-1}y) < \infty$
dla każdych x, y z przestrzeni Banacha X.

Stabilność równania funkcjonałów kwadratowych badali F. Skof ([**28**]), St. Czerwik ([**12**]), a także C. Borelli i G. L. Forti ([**8**]).

Następnie, w roku 2007, M.A. Sibaha, B. Bouikhalene, E. Elqorachi ([**24**]) udowodnili

TWIERDZENIE 2.1.2. *Niech K będzie skończoną podgrupą cykliczną grupy automorfizmów na grupie abelowej $(G,+)$, $L = |K|$. Niech dalej $\varphi\colon G\times G \to [0,\infty)$ będzie takim odwzorowaniem, że*

$$\psi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{(2L)^n} \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\in K} \varphi(x + \sum_{p\in\{1,\dots,n\};i_j<i_{j+1};k_{i_j}\in\{k_1,\dots,k_{n-1}\}} (k_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_p})x,$$

$$y + \sum_{p\in\{1,\dots,n\};i_j<i_{j+1};k_{i_j}\in\{k_1,\dots,k_{n-1}\}} (k_{i_1}\cdot\ldots\cdot k_{i_p})y) < \infty,\ x,y\in G.$$

Załóżmy, że $f\colon G\to \mathbb{C}$ spełnia nierówność

$$|\frac{1}{L}\sum_{k\in K} f(x+ky) - f(x) - f(y)| \leqslant \varphi(x,y),\ x,y\in G.$$

Wówczas granica $q(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$, gdzie $f_0(x) = f(x)$ oraz $f_n(x) = \frac{1}{L}\sum_{k\in K} f_{n-1}(x+kx)$ dla $n\geqslant 1$, istnieje dla każdego $x\in G$, oraz $q\colon G\to\mathbb{C}$ jest jedynym odwzorowaniem spełniającym warunki

$$\frac{1}{L}\sum_{k\in K} q(x+ky) = q(x)+q(y),\ x,y\in G,$$

$$|f(x)-q(x)| \leqslant \psi(x),\ x\in G.$$

A. Charifi, B. Bouikhalene and E. Elqorachi ([**9**]) pokazali pexideryzacje powyższego twierdzenia zakładając, że funkcja φ jest stała.

A. Charifi, B. Bouikhalene, E. Elqorachi, A. Redouani udowodnili stabilność dla uogólnienienia równania Jensena ([**10**, Theorem 2.1])

TWIERDZENIE 2.1.3. *Niech $(G,+)$ będzie grupą abelową, K będzie skończoną, abelową podgrupą grupy automorfizmów G, $L = |K|$, $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha, $f\colon G\to X$, $\varphi\colon G\times G\to[0,\infty)$ spełniają nierówność*

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - f(x)\| \leqslant \varphi(x,y),\ x,y\in G.$$

Niech dalej

$$\varphi_0 = \varphi,$$

$$\varphi_n(x,y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}} \varphi_{n-1}(x-\lambda x, y-\lambda y),\ x,y\in G, n\in\mathbb{N}.$$

Jeżeli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,y) < \infty, \ x,y \in G,$$

to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $F\colon G \to X$ *taka, że*

$$\sum_{\lambda \in K} F(x+\lambda y) = LF(x), \ x \in G,$$

$$F(0) = f(0),$$

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,x), \ x \in G.$$

Problem stabilności dla równania funkcyjnego

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} f(x+\lambda y) = f(x)g(y), \ x,y \in G$$

gdzie $(G,+)$ jest grupą abelową, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, K jest skończoną podgrupą grupy automorfizmów G oraz $L = |K|$ był badany przez R. Badorę ([4], [5]).
W innej swojej pracy ([7]), przy takich samych założeniach o G i K jak wyżej, rozważał on także stabilność następującego równania funkcyjnego

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} f(x+\lambda y) = f(x)g(y) + h(y), \ x,y \in S,$$

dla funkcji $f,g,h\colon G \to \mathbb{K}$ ograniczając się do funkcji f spełniającej $f \circ \lambda = f, \ \lambda \in K$.

2.2. Stabilność uogólnienia równania funkcjonałów kwadratowych

W całym tym podrozdziale, będziemy zakładać, że $(S,+)$ jest monoidem przemiennym, K skończoną podgrupą abelową grupy automorfizmów S, $L := |K|$, $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Zajmiemy się badaniem stabilności równania funkcyjnego

$$\sum_{\lambda \in K} f(x+\lambda y) = Lg(x) + Lh(y), \quad x, y \in S,$$

dla funkcji $f, g, h \colon S \to X$.

Zaczniemy od stabilności uogólnienia równania funkcjonałów kwadratowych.

TWIERDZENIE 2.2.1. *Niech $(S,+)$ będzie półgrupą abelową, $f \colon S \to X$, $\varphi \colon S \times S \to [0,\infty)$ spełniają nierówność*

$$\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} f(x+\lambda y) - f(x) - f(y)\Big\| \leqslant \varphi(x,y), \quad x, y \in S. \tag{2.2.1}$$

Niech dalej $f_0 := f$, $\varphi_0 := \varphi$,

$$f_n(x) := \frac{1}{2L}\sum_{\lambda \in K} f_{n-1}(x+\lambda x), \quad x \in S, \ n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_n(x,y) := \frac{1}{2L}\sum_{\lambda \in K} \varphi_{n-1}(x+\lambda x, y+\lambda y), \quad x, y \in S, \ n \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,x) < \infty, \quad x \in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi_n(x,y) = 0, \quad x, y \in S,$$

to odwzorowanie $F \colon S \to X$ dane wzorem

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in S, \tag{2.2.2}$$

jest dobrze zdefiniowane i jest jedyną funkcją która spełnia warunki

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} F(x+\lambda y) = F(x) + F(y), \quad x, y \in S, \tag{2.2.3}$$

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x,x), \quad x \in S. \tag{2.2.4}$$

DOWÓD. Udowodnimy najpierw indukcyjnie dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$ następującą nierówność

$$\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(x+\lambda y) - f_n(x) - f_n(y)\Big\| \leqslant \varphi_n(x,y),\ \ x,y \in S. \tag{2.2.5}$$

Dla $n = 0$ jest to nierówność (2.2.1). Załóżmy, że (2.2.5) zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_{n+1}(x+\lambda y) - f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)\Big\| = \\
&\quad = \Big\|\frac{1}{2L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f_n(x+\lambda y+\mu(x+\lambda y)) - \frac{1}{2L}\sum_{\mu\in K} f_n(x+\mu x) - \frac{1}{2L}\sum_{\mu\in K} f_n(y+\mu y)\Big\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2L}\sum_{\mu\in K}\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(x+\mu x+\lambda(y+\mu y)) - f_n(x+\mu x) - f_n(y+\mu y)\Big\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2L}\sum_{\mu\in K}\varphi_n(x+\mu x, y+\mu y) = \varphi_{n+1}(x,y),\ \ x,y\in S.
\end{aligned}$$

Kładąc $y = x$ w (2.2.5) dostajemy

$$\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\varphi_n(x,x),\ \ x \in S. \tag{2.2.6}$$

Pokażemy teraz, że dla każdego $x \in S$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Dla $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}
&\|f_{n+m}(x) - f_n(x)\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+m-1}\|f_{k+1}(x) - f_k(x)\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \sum_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{2}\varphi_k(x,x) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\varphi_k(x,x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \ x\in S.
\end{aligned}$$

Ponieważ X jest przestrzenią zupełną, to ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ma granice, co znaczy, że funkcja F jest dobrze zdefiniowana. Na mocy powyższej nierówności mamy także

$$\|F(x) - f(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n(x) - f_0(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x,x),\ \ x\in S.$$

Pokażemy, że F spełnia równanie (2.2.3). Używając nierówności (2.2.5) dostajemy

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) - F(x) - F(y)\Big\| &= \lim_{n\to\infty}\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(x+\lambda y) - f_n(x) - f_n(y)\Big\| \leqslant \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\varphi_n(x,y) = 0,\ \ x,y\in S.
\end{aligned}$$

Aby wykazać jedyność załóżmy, że $H\colon S \to X$ spełnia warunki (2.2.3) i (2.2.4). Indukcyjnie wykażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\|f_n(x) - H(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\varphi_k(x,x),\ \ x\in S. \tag{2.2.7}$$

Dla $n = 0$ jest to nierówność (2.2.4). Załóżmy, że (2.2.7) zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy

$$\begin{aligned}||f_{n+1}(x) - H(x)|| &\leqslant \frac{1}{2}||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(x+\lambda x) - 2H(x)|| = \\ &= \frac{1}{2}||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(x+\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} H(x+\lambda x)|| \leqslant \frac{1}{2L}\sum_{\lambda\in K}||f_n(x+\lambda x) - H(x+\lambda x)|| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{4L}\sum_{\lambda\in K}\sum_{k=n}^{\infty}\varphi_k(x+\lambda x, x+\lambda x) = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2L}\sum_{\lambda\in K}\varphi_k(x+\lambda x, x+\lambda x) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\varphi_{k+1}(x,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\varphi_k(x,x), \ x \in S.\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności (2.2.7) dostajemy

$$||F(x) - H(x)|| = \lim_{n\to\infty}||f_n(x) - H(x)|| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\varphi_k(x,x) = 0, \ x \in S,$$

skąd $H = F$, co kończy dowód. □

W przypadku stałej funkcji kontrolnej otrzymujemy

WNIOSEK 2.2.2. *Niech $(S,+)$ będzie półgrupą abelową, $f\colon S \to X$, $\delta > 0$ spełniają nierówność*

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - f(x) - f(y)|| \leqslant \delta, \ x,y \in S.$$

Niech dalej $f_0 := f$,

$$f_n(x) := \frac{1}{2L}\sum_{\lambda\in K} f_{n-1}(x+\lambda x), \ x \in S, \ n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas, odwzorowanie $F\colon S \to X$ dane wzorem

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ x \in S,$$

jest dobrze zdefiniowane i jest jedyną funkcją która spełnia warunki

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = F(x) + F(y), \ x,y \in S,$$

$$||f(x) - F(x)|| \leqslant \delta, \ x \in S.$$

DOWÓD. Ponieważ funkcje φ_n z poprzedniego twierdzenia mają postać

$$\varphi_n(x,y) = 2^{-n}\delta, \ x,y \in S, \ n \in \mathbb{N},$$

to

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x,x) = 2\delta, \ x \in S,$$

co pokazuje, że spełnione są założenia poprzedniego twierdzenia, z którego otrzymujemy tezę. □

Pokażemy teraz stabilność dla uogólnienia równania Jensena.

TWIERDZENIE 2.2.3. *Niech* $f\colon S \to X$, $\varphi\colon S \times S \to [0,\infty)$ *spełniają nierówność*

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - f(x)|| \leqslant \varphi(x,y), \ x,y \in S. \tag{2.2.8}$$

Niech dalej $f_0 := f - f(0)$, $\varphi_0 := \varphi$,

$$f_n(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}} f_{n-1}(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x), \ x \in S, \ n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_n(x,y) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}} \varphi_{n-1}(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x, y+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y), \ x,y \in S, \ n \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_n(x,x) + \frac{1}{L}\varphi_n(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)] < \infty, \ x \in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\varphi_n(x,y) = 0, \ x,y \in S,$$

to odwzorowanie $F\colon S \to X$ *dane wzorem*

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) + f(0), \ x \in S, \tag{2.2.9}$$

jest dobrze zdefiniowane i jest jedyną funkcją spełniającą warunki

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = F(x), \ x,y \in S, \tag{2.2.10}$$

$$||f(x) - F(x)|| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_k(x,x) + \frac{1}{L}\varphi_k(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)], \ x \in S, \tag{2.2.11}$$

$$F(0) = f(0). \tag{2.2.12}$$

DOWÓD. Udowodnimy najpierw indukcyjnie, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$ spełniona jest następująca nierówność

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(x+\lambda y) - f_n(x)|| \leqslant \varphi_n(x,y), \ x,y \in S. \tag{2.2.13}$$

Dla $n = 0$ jest to nierówność (2.2.8). Załóżmy, że (2.2.13) zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_{n+1}(x+\lambda y) - f_{n+1}(x)\Big\| = \Big\|\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} f_n(x+\lambda y+\mu\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu(x+\lambda y))+\\
&\quad -\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} f_n(x+\mu\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu x)\Big\| \leqslant\\
&\quad \leqslant \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(x+\mu\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu x+\lambda(y+\mu\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu y))+\\
&\quad - f_n(x+\mu\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu x)\Big\| \leqslant\\
&\quad \leqslant \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\varphi_n(x+\mu\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu x, y+\mu\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu y) = \varphi_{n+1}(x,y),\ x,y\in S.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}_0$ mamy

$$f_n(0) = 0. \tag{2.2.14}$$

Dla $n = 0$ jest to oczywiste. Załóżmy więc, że (2.2.14) zachodzi dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$. Wówczas

$$f_{n+1}(0) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}} f_n(0+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu 0) = \frac{L-1}{L}f_n(0) = 0.$$

Korzystając z (2.2.13) oraz (2.2.14) mamy

$$\begin{aligned}
&\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| = \Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}} f_n(x+\lambda\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu x) - f_n(x)\Big\| \leqslant\\
&\quad \leqslant \Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(x+\lambda\sum_{\nu\in K\setminus\{id\}}\nu x) - f_n(x)\Big\| + \frac{1}{L}\Big\|f_n(\sum_{\nu\in K}\nu x) - f_n(0)\Big\| \leqslant\\
&\quad \leqslant \varphi_n(x,x) + \frac{1}{L}\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f_n(\lambda\sum_{\nu\in K}\nu x) - f_n(0)\Big\| \leqslant \varphi_n(x,x) + \frac{1}{L}\varphi_n(0,\sum_{\nu\in K}\nu x),\ x\in S.
\end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że dla każdego $x \in S$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Dla $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}
&\|f_{n+m}(x) - f_n(x)\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+m-1}\|f_{k+1}(x) - f_k(x)\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+m-1}[\varphi_k(x,x) + \frac{1}{L}\varphi_k(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)] \leqslant\\
&\quad \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}[\varphi_k(x,x) + \frac{1}{L}\varphi_k(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ x\in S.
\end{aligned}$$

Ponieważ X jest przestrzenią zupełną, to ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ma granicę, co znaczy, że funkcja F jest dobrze zdefiniowana. Na mocy powyższej nierówności mamy także

$$\|F(x) - f(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n(x) - f_0(x)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_k(x,x) + \frac{1}{L}\varphi_k(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)],\ x\in S.$$

Pokażemy, że F spełnia równanie (2.2.10). Używając nierówności (2.2.13) dostajemy

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(x+\lambda y)-F(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}f_n(x+\lambda y)-f_n(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \liminf_{n\to\infty}\varphi_n(x,y)=0,\ \ x,y\in S.$$

Aby wykazać jedyność załóżmy, że $H\colon S\to X$ spełnia warunki (2.2.10) – (2.2.12). Indukcyjnie wykażemy dla każdego $n\in\mathbb{N}_0$, że

$$\|F(x)-H(x)\|\leqslant 2\sum_{k=n}^{\infty}[\varphi_k(x,x)+\frac{1}{L}\varphi_k(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)],\ \ x\in S. \tag{2.2.15}$$

Dla $n=0$, na mocy (2.2.11) mamy

$$\|F(x)-H(x)\|\leqslant\|F(x)-f(x)\|+\|f(x)-H(x)\|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{\infty}[\varphi_k(x,x)+\frac{1}{L}\varphi_k(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)],\ \ x\in S.$$

Załóżmy, że (2.2.15) zachodzi dla pewnego $n\in\mathbb{N}_0$. Wtedy, na mocy (2.2.10) mamy

$$\|F(x)-H(x)\| = \|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)-\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}H(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)\| =$$
$$= \|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}F(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)-\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}H(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)+$$
$$+\frac{1}{L}F(\sum_{\mu\in K}\mu x)-\frac{1}{L}H(\sum_{\mu\in K}\mu x)\| =$$
$$= \|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}F(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)-\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}H(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)+$$
$$+\frac{1}{L}F(0)-\frac{1}{L}H(0)\| =$$
$$= \|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}F(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)-\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}H(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\|F(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)-H(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}[\varphi_k(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x, x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x)+$$
$$+\frac{1}{L}\varphi_k(0,\sum_{\nu\in K}\nu(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}))] = 2\sum_{k=n}^{\infty}[\varphi_{k+1}(x,x)+\frac{1}{L}\varphi_{k+1}(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)] =$$
$$= 2\sum_{k=n+1}^{\infty}[\varphi_k(x,x)+\frac{1}{L}\varphi_k(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)],\ \ x\in S.$$

Korzystając z nierówności (2.2.15) dostajemy

$$||F(x) - H(x)|| \leqslant \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=n}^{\infty}[\varphi_k(x,x) + \frac{1}{L}\varphi_k(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)] = 0, \ x \in S,$$

skąd $H = F$, co kończy dowód. □

W przypadku stałej funkcji kontrolnej dostajemy

WNIOSEK 2.2.4. *Niech $f\colon S \to X$, $\delta > 0$ spełniają nierówność*

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - f(x)|| \leqslant \delta, \ x, y \in S.$$

Niech dalej $f_0 := f - f(0)$,

$$f_n(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}} f_{n-1}(x + \lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x), \ x \in S, \ n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas, odwzorowanie $F\colon S \to X$ dane wzorem

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) + f(0), \ x \in S,$$

jest dobrze zdefiniowane i jest jedyną funkcją spełniającą warunki

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = F(x), \ x, y \in S,$$

$$||f(x) - F(x)|| \leqslant (L+1)\delta, \ x \in S,$$

$$F(0) = f(0).$$

DOWÓD. Ponieważ funkcje φ_n z poprzedniego twierdzenia mają postać

$$\varphi_n(x,y) = (\frac{L-1}{L})^n\delta, \ x, y \in S, \ n \in \mathbb{N},$$

to

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_n(x,x) + \frac{1}{L}\varphi_n(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)] = (1+\frac{1}{L})\frac{1}{1-\frac{L-1}{L}}\delta = (L+1)\delta, \ x \in S,$$

co pokazuje, że spełnione są założenia poprzedniego twierdzenia, z którego otrzymujemy tezę. □

Udowodnimy teraz stabilność uogólnienia równania Drygasa.

TWIERDZENIE 2.2.5. *Niech $f\colon S \to X$, $\varphi\colon S \times S \to [0, \infty)$ spełniają nierówność*

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)|| \leqslant \varphi(x,y), \ x, y \in S. \tag{2.2.16}$$

Niech dalej

$$\vartheta_0(x,y) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x,y), \quad \psi_0(x,y) := \varphi(x,y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x,y), \ x,y\in S,$$

$$\vartheta_n(x,y) := \frac{1}{2L}\sum_{\lambda\in K}\vartheta_{n-1}(x+\lambda x, y+\lambda y), \ x,y\in S, \ n\in\mathbb{N},$$

$$\psi_n(x,y) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\psi_{n-1}(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x, y+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y), \ x,y\in S, \ n\in\mathbb{N}.$$

Jeżeli

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n(x,\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0,\sum_{\mu\in K}\mu x)] < \infty, \ x\in S,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n(x,x) < \infty, \ x\in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\psi_n(x,y) = 0, \ \liminf_{n\to\infty}\vartheta_n(x,y) = 0, \ x,y\in S,$$

to istnieje odwzorowanie $F\colon S\to X$ *takie, że*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(x+\lambda y) = F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(\lambda y), \ x,y\in S, \tag{2.2.17}$$

$$\|f(x)-F(x)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}\vartheta_n(x,x) + \psi_n(x,\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0,\sum_{\mu\in K}\mu x)], \ x\in S, \tag{2.2.18}$$

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}f(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(\lambda x)\| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n(x,x), \ x\in S. \tag{2.2.19}$$

Ponadto F jest jedyną funkcją spełniającą powyższe warunki jeżeli

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n(x) = 0, \ x\in S,$$

gdzie

$$\eta_0(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n(x,x), \ x\in S,$$

$$\eta_n(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\eta_{n-1}(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x), \ x\in S, \ n\in\mathbb{N}.$$

DOWÓD. Zdefiniujmy odwzorowania $p,q\colon S\to X$ wzorami

$$p(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}f(\lambda x), \ x\in S,$$

$$q(x) = f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}f(\lambda x), \ x\in S.$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
&\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} p(x+\lambda y) - p(x) - p(y)\| = \\
&= \|\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(\mu(x+\lambda y)) - \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(\mu x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\| = \\
&= \|\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(\mu x+\lambda y) - \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(\mu x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\mu(x+\lambda y)) - f(\mu x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}\varphi(\mu x, y) = \vartheta_0(x,y),\ \ x,y\in S.
\end{aligned}
$$

Na mocy twierdzenia 2.2.1 istnieje odwzorowanie $P\colon S\to X$ takie, że

$$
\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} P(x+\lambda y) = P(x)+P(y),\ \ x,y\in S,
$$

$$
\|p(x)-P(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_k(x,x),\ \ x\in S.
$$

Dla odwzorowania q mamy

$$
\begin{aligned}
&\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(x+\lambda y) - q(x)\| = \|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}[f(x+\lambda y) - p(x+\lambda y)] - [f(x)-p(x)]\| \leqslant \\
&\leqslant \|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x)\| + \|p(x)+p(y) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} p(x+\lambda y)\| \leqslant \\
&\leqslant \varphi(x,y) + \vartheta_0(x,y) = \psi_0(x,y),\ \ x,y\in S.
\end{aligned}
$$

Na mocy twierdzenia 2.2.3 istnieje odwzorowanie $Q\colon S\to X$ takie, że

$$
\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(x+\lambda y) = Q(x),\ \ x,y\in S,
$$

$$
\|q(x)-Q(x)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k(x,x) + \frac{1}{L}\psi_k(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)],\ \ x\in S,
$$

$$
Q(0) = q(0) = 0.
$$

Zdefiniujmy funkcję $F\colon S\to X$ wzorem $F=P+Q$. Wówczas mamy

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} P(x+\lambda y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(x+\lambda y) = \\
&= P(x)+P(y)+Q(x) = F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} P(\lambda y) + Q(0) =
\end{aligned}
$$

$$= F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} P(\lambda y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda y) = F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda y), \; x, y \in S,$$

a także korzystając z tego, że $f = p + q$ dostajemy

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \|p(x) - P(x)\| + \|q(x) - Q(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_k(x,x) + \sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k(x,x) + \frac{1}{L}\psi_k(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)], \; x \in S,$$
$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda x)\| = \|p(x) - P(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_k(x,x), \; x \in S.$$

Pozostaje do wykazania jedyność. Załóżmy, że funkcje $F_1, F_2 \colon S \to X$ spełnia warunki (2.2.17) - (2.2.19). Niech $P_i, Q_i \colon S \to X$, $i \in \{1,2\}$, będą dane wzorami

$$P_i(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F_i(\lambda x), \; x \in S, \; i \in \{1,2\},$$
$$Q_i(x) := F_i(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F_i(\lambda x), \; x \in S, \; i \in \{1,2\}.$$

Wówczas spełniają one równości

$$\frac{1}{2L}\sum_{\lambda\in K} P_i(x + \lambda x) = P_i(x), \; x \in S, \; i \in \{1,2\},$$
$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}} Q_i(x + \lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) = Q_i(x), \; x \in S, \; i \in \{1,2\}.$$

Istotnie,

$$\frac{1}{2L}\sum_{\lambda\in K} P_i(x + \lambda x) = \frac{1}{2L^2}\sum_{\mu\in K}\sum_{\lambda\in K} F_i(\mu x + \lambda x) = \frac{1}{2L}\sum_{\mu\in K}[F_i(\mu x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F_i(\lambda x)] =$$
$$= \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F_i(\lambda x) = P_i(x), \; x \in S, \; i \in \{1,2\}$$

oraz

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}} Q_i(x + \lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q_i(x + \lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) - \frac{1}{L}Q_i(\sum_{\mu\in K}\mu x) =$$
$$= \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F_i(x + \lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) - \frac{1}{L^2}\sum_{\nu\in K}\sum_{\lambda\in K} F_i(\nu x + \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) +$$
$$- \frac{1}{L}F_i(\sum_{\mu\in K}\mu x) + \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K} F_i(\lambda \sum_{\mu\in K}\mu x) = F_i(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F_i(\lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) +$$
$$- \frac{1}{L}\sum_{\nu\in K} F_i(\nu x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F_i(\lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) = Q_i(x), \; x \in S, \; i \in \{1,2\}.$$

Wykażemy indukcyjnie, że dla $n \in \mathbb{N}_0$

$$||P_1(x) - P_2(x)|| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \vartheta_k(x,x), \ x \in S, \tag{2.2.20}$$

$$||Q_1(x) - Q_2(x)|| \leqslant 2\eta_n(x) + 2\sum_{k=n}^{\infty}[\psi_n(x, \sum_{\mu \in K\setminus\{id\}} \mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu \in K} \mu x)], \ x \in S, \tag{2.2.21}$$

skąd dla $x \in S$ dostaniemy

$$||P_1(x) - P_2(x)|| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \vartheta_k(x,x) = 0,$$

$$||Q_1(x) - Q_2(x)|| \leqslant \lim_{n\to\infty} (2\eta_n(x) + 2\sum_{k=n}^{\infty}[\psi_n(x, \sum_{\mu \in K\setminus\{id\}} \mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu \in K} \mu x)]) = 0,$$

czyli $P_1 = P_2$ i $Q_1 = Q_2$ a wiec także $F_1 = F_2$.

Dla $n = 0$ mamy

$$||P_1(x) - P_2(x)|| \leqslant ||\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} f(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} F_1(\lambda x)|| + ||\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} F_2(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} f(\lambda x)|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x,x), \ x \in S,$$

$$||Q_1(x) - Q_2(x)|| \leqslant ||F_1(x) - f(x)|| + ||f(x) - F_2(x)|| + ||P_2(x) - P_1(x)|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}[2\vartheta_k(x,x) + \psi_n(x, \sum_{\mu \in K\setminus\{id\}} \mu x) + 2\frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu \in K} \mu x)] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x,x) =$$

$$= \eta_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}[\psi_n(x, \sum_{\mu \in K\setminus\{id\}} \mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu \in K} \mu x)], \ x \in S.$$

Załóżmy, że nierówności (2.2.20) i (2.2.21) zachodzą dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$. Wówczas

$$||P_1(x) - P_2(x)|| = ||\frac{1}{2L}\sum_{\lambda \in K} P_1(x + \lambda x) - \frac{1}{2L}\sum_{\lambda \in K} P_2(x + \lambda x)]|| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2L}\sum_{\lambda \in K} ||P_1(x + \lambda x) - P_2(x + \lambda x)|| \leqslant \frac{1}{2L}\sum_{\lambda \in K}\sum_{k=n}^{\infty} \vartheta_k(x + \lambda x, x + \lambda x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2L}\sum_{\lambda \in K} \vartheta_k(x + \lambda x, x + \lambda x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \vartheta_k(x,x), \ x \in S,$$

$$||Q_1(x) - Q_2(x)|| = ||\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K\setminus\{id\}} [Q_1(x + \lambda \sum_{\mu \in K\setminus\{id\}} \mu x) - Q_2(x + \lambda \sum_{\mu \in K\setminus\{id\}} \mu x)]|| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K\setminus\{id\}} ||Q_1(x + \lambda \sum_{\mu \in K\setminus\{id\}} \mu x) - Q_2(x + \lambda \sum_{\mu \in K\setminus\{id\}} \mu x)|| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K\setminus\{id\}} (2\eta_n(x+\lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) + 2\sum_{k=n}^{\infty}[\psi_n(x+\lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x,$$

$$, \sum_{\sigma\in K\setminus\{id\}} \sigma(x+\lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x)) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\sigma\in K} \sigma(x+\lambda \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x))]) =$$

$$= 2\eta_{n+1}(x) + 2\sum_{k=n+1}^{\infty}[\psi_n(x, \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu\in K} \mu x)],\ x\in S,$$

co kończy dowód indukcyjny, a także pokazuje jedyność funkcji F. □

W przypadku stałej funkcji kontrolnej otrzymujemy

WNIOSEK 2.2.6. *Niech* $f\colon S\to X$, $\delta>0$ *spełniają nierówność*

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\| \leqslant \delta,\ x,y\in S.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $F\colon S\to X$ *takie, że*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda y),\ x,y\in S,$$

$$\|f(x)-F(x)\| \leqslant (L+2)\delta,\ x\in S,$$

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda x)\| \leqslant \delta,\ x\in S.$$

Teraz możemy przejść do dowodu głównego twierdzenia tej części pracy.

TWIERDZENIE 2.2.7. *Niech* $f,g,h\colon S\to X$, $\varphi\colon S\times S\to[0,\infty)$ *spełniają nierówność*

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - g(x) - h(y)\| \leqslant \varphi(x,y),\ x,y\in S. \tag{2.2.22}$$

Niech dalej

$$\varphi_0(x,y) := \varphi(x,y)+\varphi(x,0)+\varphi(0,y),\ x,y\in S,$$

$$\vartheta_0(x,y) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi_0(\lambda x,y), \qquad \psi_0(x,y) := \varphi_0(x,y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi_0(\lambda x,y),\ x,y\in S,$$

$$\vartheta_n(x,y) := \frac{1}{2L}\sum_{\lambda\in K}\vartheta_{n-1}(x+\lambda x, y+\lambda y),\ x,y\in S,\ n\in\mathbb{N},$$

$$\psi_n(x,y) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\psi_{n-1}(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x, y+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y),\ x,y\in S,\ n\in\mathbb{N}.$$

Jeżeli

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n(x, \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0,\sum_{\mu\in K}\mu x)] < \infty,\ x\in S,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(x,x) < \infty, \ \ x \in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \psi_n(x,y) = 0, \ \ \liminf_{n\to\infty} \vartheta_n(x,y) = 0, \ \ x, y \in S,$$

to istnieją odwzorowania $F, G, H\colon S \to X$ *takie, że*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = G(x) + H(y), \ \ x, y \in S, \tag{2.2.23}$$

$$||f(x) - F(x)|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}\vartheta_n(x,x) + \psi_n(x, \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu\in K}\mu x)], \ \ x \in S, \tag{2.2.24}$$

$$||g(x) - G(x)|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}\vartheta_n(x,x) + \psi_n(x, \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu\in K}\mu x)] + \varphi(x,0), \ \ x \in S, \tag{2.2.25}$$

$$||h(x) - H(x)|| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x,x) + \varphi(0,x), \ \ x \in S. \tag{2.2.26}$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że z nierówności (2.2.22) mamy

$$||f(x) - g(x) - h(0)|| \leqslant \varphi(x,0), \ \ x \in S,$$

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y) - g(0) - h(y)|| \leqslant \varphi(0,y), \ \ y \in S.$$

Stąd dla funkcji $q\colon S \to X$, $q := f - g(0) - h(0)$ mamy

$$\begin{aligned}
||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(x+\lambda y) - q(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda y)|| &\leqslant ||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - g(x) - h(y)|| + \\
&+ ||g(x) + h(0) - f(x)|| + ||g(0) + h(y) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)|| \leqslant \\
&\leqslant \varphi(x,y) + \varphi(x,0) + \varphi(0,y) = \varphi_0(x,y), \ \ x, y \in S.
\end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia 2.2.5 istnieje funkcja $Q\colon S \to X$ taka, że

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(x+\lambda y) = Q(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda y), \ \ x, y \in S,$$

$$||q(x) - Q(x)|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}\vartheta_n(x,x) + \psi_n(x, \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu\in K}\mu x)], \ \ x \in S,$$

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x)|| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(x,x), \ \ x \in S.$$

Zdefiniujmy odwzorowania $F, G, H\colon S \to X$ wzorami

$$F(x) := Q(x) + g(0) + h(0), \ \ x \in S,$$

$$G(x) := Q(x) + g(0),\ x \in S,$$
$$H(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x) + h(0),\ x \in S.$$

Wówczas mamy

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(x+\lambda y) + g(0) + h(0) =$$
$$= Q(x) + g(0) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda y) + h(0) = G(x) + H(y),\ x, y \in S,$$

a także

$$||f(x) - F(x)|| = ||q(x) - Q(x)|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}\vartheta_n(x,x) + \psi_n(x, \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) +$$
$$+ \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu\in K} \mu x)],\ x \in S,$$
$$||g(x) - G(x)|| \leqslant ||f(x) - F(x)|| + ||g(x) + h(0) - f(x)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2}\vartheta_n(x,x) + \psi_n(x, \sum_{\mu\in K\setminus\{id\}} \mu x) + \frac{1}{L}\psi_n(0, \sum_{\mu\in K} \mu x)] + \varphi(x,0),\ x \in S,$$
$$||h(x) - H(x)|| = ||h(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x) - h(0)|| \leqslant ||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x)|| +$$
$$+ ||h(x) + g(0) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x)|| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_k(x,x) + \varphi(0,x),\ x \in S,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

W przypadku stałej funkcji kontrolnej otrzymujemy

WNIOSEK 2.2.8. *Niech $f, g, h\colon S \to X$, $\delta > 0$ spełniają nierówność*

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - g(x) - h(y)|| \leqslant \delta,\ x, y \in S.$$

Wówczas istnieją odwzorowania $F, G, H\colon S \to X$ takie, że

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = G(x) + H(y),\ x, y \in S,$$
$$||f(x) - F(x)|| \leqslant (6L+9)\delta,\ x \in S,$$
$$||g(x) - G(x)|| \leqslant (6L+10)\delta,\ x \in S,$$
$$||h(x) - H(x)|| \leqslant 4\delta,\ x \in S.$$

2.3. Stabilność uogólnienia równania funkcjonałów kwadratowych i równania Wilsona

W całym tym podrozdziale będziemy zakładać, że $(S,+)$ jest grupą abelową, K jest skończoną, abelową podgrupą grupy automorfizmów S, $L := |K|$, $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Dla danego homomorfizmu $m\colon S \to \mathbb{C}$ zbiory K_0 i K_1 niech będą takie jak odpowiednio w definicjach 1.3.4 oraz 1.3.6.

Zajmiemy się badaniem stabilności równania funkcyjnego

$$\sum_{\lambda \in K} f(x+\lambda y) = L\alpha(y)g(x) + Lh(y), \ x, y \in S,$$

dla funkcji $f, g, h\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{C}$.

Zaczniemy od badania stabilności uogólnienia równania Wilsona.

Udowodnimy najpierw pewien lemat.

LEMAT 2.3.1. *Niech* $f\colon S \to X$, $f \neq 0$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\varphi\colon S \times S \to [0,\infty)$ *spełniają nierówność*

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)f(x)\| \leqslant \varphi(x,y), \ x, y \in S. \tag{2.3.1}$$

Wówczas zachodzi co najmniej jeden z dwóch przypadków:

(i) *Istnieją* $x_0, y_0 \in S$, $M > 0$ *takie, że*

$$\|f(z)\| \leqslant M \sum_{\lambda \in K} [\varphi(z, x_0+\lambda y_0) + \varphi(z+\lambda x_0, y_0) + \varphi(z, x_0)], \ z \in S.$$

(ii) *Odwzorowanie* α *spełnia równanie*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda \in K} \alpha(x+\lambda y) = \alpha(x)\alpha(y), \ x, y \in S. \tag{2.3.2}$$

Ponadto, jeżeli zachodzi warunek (i), *to dla* $z_0 \in S$ *spełniającego* $f(z_0) \neq 0$ *mamy*

$$\begin{aligned}|\alpha(x)| \leqslant \frac{1}{\|f(z_0)\|}\varphi(z_0, x) + \frac{M}{L\|f(z_0)\|}\sum_{\lambda \in K}\sum_{\mu \in K}[\varphi(z_0+\lambda x, x_0+\mu y_0)+ \\ + \varphi(z_0+\lambda x+\mu x_0, y_0) + \varphi(z_0+\lambda x, x_0)], \ x \in S.\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

DOWÓD. Załóżmy, że warunek (i) nie zachodzi. Ustalmy $x, y \in S$. Wówczas istnieje ciąg $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$\|f(z_n)\| > n\max(1, |\alpha(y)|)\sum_{\lambda \in K}[\varphi(z_n, x+\lambda y) + \varphi(z_n+\lambda x, y) + |\alpha(y)|\varphi(z_n, x)] \geqslant$$

$$\geqslant n \sum_{\lambda \in K} [\varphi(z_n, x + \lambda y) + \varphi(z_n + \lambda x, y) + |\alpha(y)|\varphi(z_n, x)], \ n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy, dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$|\frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} \alpha(x + \lambda y) - \alpha(x)\alpha(y)| \cdot ||f(z_n)|| \leqslant$$

$$\leqslant ||\frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} \alpha(x + \lambda y) f(z_n) - \frac{1}{L^2} \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K} f(z_n + \mu(x + \lambda y))|| +$$

$$+ ||\frac{1}{L^2} \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K} f(z_n + \mu x + \lambda y) - \alpha(y) \frac{1}{L} \sum_{\mu \in K} f(z_n + \mu x)|| +$$

$$+ |\alpha(y)| \cdot ||\frac{1}{L} \sum_{\mu \in K} f(z_n + \mu x) - \alpha(x) f(z_n)|| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} [\varphi(z_n, x + \lambda y) + \varphi(z_n + \lambda x, y) + |\alpha(y)|\varphi(z_n, x)] < \frac{||f(z_n)||}{Ln}.$$

Dzieląc powyższą nierówność przez $||f(z_n)||$ i zmierzając z $n \to \infty$ dostajemy

$$|\frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} \alpha(x + \lambda y) - \alpha(x)\alpha(y)| \leqslant 0,$$

co kończy dowód (ii).

Załóżmy, że zachodzi (i). Wówczas, dla $z_0 \in S$ takiego, że $f(z_0) \neq 0$, mamy

$$|\alpha(x)| \cdot ||f(z_0)|| \leqslant ||\alpha(x) f(z_0) - \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} f(z_0 + \lambda x)|| + \sum_{\lambda \in K} ||f(z_0 + \lambda x)|| \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(z_0, x) + \frac{M}{L} \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K} [\varphi(z_0 + \lambda x, x_0 + \mu y_0) + \varphi(z_0 + \lambda x + \mu x_0, y_0) +$$

$$+ \varphi(z_0 + \lambda x, x_0)], \ x \in S,$$

skąd otrzymujemy nierówność (2.3.3). □

Gdy w powyższym lemacie mamy stałą funkcję kontrolną, to otrzymujemy

WNIOSEK 2.3.2. *Niech* $f \colon S \to X$, $\alpha \colon S \to \mathbb{K}$, $\delta > 0$ *spełniają nierówność*

$$||\frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda y) - \alpha(y) f(x)|| \leqslant \delta, \ x, y \in S. \tag{2.3.4}$$

Wówczas funkcje f *i* α *są ograniczone lub* f *jest nieograniczona a odwzorowanie* α *spełnia równanie* (2.3.2).

Pokażemy teraz twierdzenie mówiące kiedy mamy superstabilność.

TWIERDZENIE 2.3.3. *Niech* $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\varphi\colon S \times S \to [0,\infty)$ *spełniają nierówność* (2.3.1). *Załóżmy, że funkcja* α *spełnia równanie* (2.3.2). *Jeżeli*

$$\forall_{x,y\in S}\exists_{(z_n)_{n\in\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\alpha(z_n)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda y, z_n) + \varphi(x, z_n+\lambda y)] = 0, \tag{2.3.5}$$

to funkcje f *i* α *spełniają równanie*

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = L\alpha(y)f(x), \quad x,y\in S. \tag{2.3.6}$$

DOWÓD. Dla $x, y \in S$ oraz ciągu $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego warunek (2.3.5) mamy

$$\begin{aligned}
||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)f(x)|| &= \frac{1}{|\alpha(z_n)|}||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(z_n)f(x+\lambda y) - \alpha(z_n)\alpha(y)f(x)|| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{|\alpha(z_n)|}||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(z_n)f(x+\lambda y) - \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(x+\lambda y+\mu z_n)||+ \\
&+ \frac{1}{|\alpha(z_n)|}||\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(x+\mu(z_n+\lambda y)) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(z_n+\lambda y)f(x)|| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{L|\alpha(z_n)|}\sum_{\lambda\in K}||\alpha(z_n)f(x+\lambda y) - \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(x+\lambda y+\mu z_n)||+ \\
&+ \frac{1}{L|\alpha(z_n)|}\sum_{\lambda\in K}||\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(x+\mu(z_n+\lambda y)) - \alpha(z_n+\lambda y)f(x)|| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{L|\alpha(z_n)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda y, z_n) + \varphi(x, z_n+\lambda y)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

WNIOSEK 2.3.4. *Niech* $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\delta > 0$ *spełniają nierówność* (2.3.4). *Załóżmy, że funkcja* f *nie jest ograniczona. Jeżeli odwzorowanie* α *nie jest ograniczone, to funkcje* f *i* α *spełniają równanie* (2.3.6).

Teraz pokażemy kiedy mamy stabilność.

Rozważymy najpierw przypadek zespolony.

TWIERDZENIE 2.3.5. *Załóżmy, że* $(X, ||\cdot||)$ *jest zespolona. Niech funkcje* $f\colon G \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{C}$, $\alpha \neq const$, $\varphi\colon S\times S \to [0,\infty)$ *spełniają nierówność* (2.3.1). *Załóżmy, że funkcja* α *spełnia równanie* (2.3.2). *Wówczas istnieją homomorfizm* $m\colon S \to \mathbb{C}^*$ *oraz* $\beta_\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b_\lambda \in S$, $\lambda \in K_1$ *takie, że*

$$\alpha(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x), \quad x\in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda m(\mu b_\lambda)=\begin{cases}|K_1|, & \mu\in K_0,\\ 0, & \mu\notin K_0,\end{cases}$$

$$m(x)=\sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda\alpha(x+b_\lambda),\quad x\in S.$$

Ponadto, jeżeli dla każdego $\tau\in K_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n^\tau(x,x)+\frac{1}{L}\psi_n^\tau(0,\sum_{\nu\in K}\nu x)]<\infty,\quad x\in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\psi_n^\tau(x,y)=0,\quad x,y\in S,$$

gdzie

$$\psi_0^\tau(x,y)=\frac{1}{L|K_1||m(\tau x+\tau y)|}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}|\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho|\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+$$

$$+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu),\lambda b_\mu+b_\rho)+\varphi(x+\lambda b_\rho,y+\sigma\tau^{-1}b_\nu+\lambda b_\mu)],\quad x,y\in S,$$

$$\psi_n^\tau(x,y)=\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\psi_{n-1}^\tau(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x,y+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y),\quad x,y\in S,\ n\in\mathbb{N},$$

to istnieje odwzorowanie $F\colon S\to X$ *takie, że*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(x+\lambda y)=\alpha(y)F(x),\quad x,y\in S,\tag{2.3.7}$$

$$\|f(x)-F(x)\|\leqslant\sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\varphi(x,b_\nu)+\sum_{\tau\in K_1}|m(\tau x)|\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+$$

$$+\frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0,\sum_{\nu\in K_0}\nu x)],\quad x\in S,\tag{2.3.8}$$

$$F(0)=\sum_{\nu\in K_1}\frac{\beta_\nu}{L}\sum_{\lambda\in K}f(\lambda b_\nu).\tag{2.3.9}$$

DOWÓD. Ponieważ funkcja α spełnia równanie (2.3.2), to na mocy twierdzenia 1.3.8 istnieją homomorfizm $m\colon S\to\mathbb{C}^*$ oraz $\beta_\lambda\in\mathbb{C}^*$, $b_\lambda\in S$, $\lambda\in K_1$ takie, że

$$\alpha(x)=\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}m(\lambda x),\quad x\in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda m(\mu b_\lambda)=\begin{cases}|K_1|, & \mu\in K_0,\\ 0, & \mu\notin K_0,\end{cases}$$

$$m(x)=\sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda\alpha(x+b_\lambda),\quad x\in S.$$

Przyjmijmy $L_0 := |K_0|$, $L_1 := |K_1|$.

Korzystając z powyższych zależności zauważmy najpierw, że

$$L_1 \sum_{\lambda \in K_0} f(x+\lambda y) = \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K_1} \beta_\mu m(\lambda b_\mu) f(x+\lambda y) =$$
$$= \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\mu \beta_\nu \alpha(\lambda b_\mu + \beta_\nu) f(x+\lambda y), \ x,y \in S,$$

a także

$$\sum_{\rho \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\mu \beta_\nu \alpha(y+\rho b_\mu) f(x+\rho b_\nu) = \sum_{\rho \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\mu \beta_\nu \alpha(\rho^{-1} y + b_\mu) f(x+\rho b_\nu) =$$
$$= \sum_{\rho \in K} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\nu m(\rho^{-1} y) f(x+\rho b_\nu) = \sum_{\lambda \in K_1} \sum_{\sigma \in K_0} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\nu m(\sigma^{-1} \lambda y) f(x+\lambda^{-1}\sigma b_\nu) =$$
$$= \sum_{\lambda \in K_1} m(\lambda y) \sum_{\nu \in K_1} \beta_\nu \sum_{\sigma \in K_0} f(x+\lambda^{-1}\sigma b_\nu), \ x,y \in S.$$

Z powyższych równości mamy

$$||L_1 \sum_{\lambda \in K_0} f(x+\lambda y) - \sum_{\rho \in K_1} m(\rho y) \sum_{\nu \in K_1} \beta_\nu \sum_{\sigma \in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1} b_\nu)|| =$$
$$= || \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\mu \beta_\nu \alpha(\lambda b_\mu + \beta_\nu) f(x+\lambda y) +$$
$$- \sum_{\rho \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\mu \beta_\nu \alpha(y+\rho b_\mu) f(x+\rho b_\nu)|| \leqslant$$
$$\leqslant || \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\mu \beta_\nu \alpha(\lambda b_\mu + \beta_\nu) f(x+\lambda y) +$$
$$- \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \frac{\beta_\mu \beta_\nu}{L} \sum_{\rho \in K} f(x+\lambda y + \rho(\lambda b_\mu + b_\nu))|| +$$
$$+ || \sum_{\rho \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \frac{\beta_\mu \beta_\nu}{L} \sum_{\lambda \in K} f(x + b_\nu + \lambda(y+\rho b_\mu)) +$$
$$- \sum_{\rho \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \beta_\mu \beta_\nu \alpha(y+\rho b_\mu) f(x+\rho b_\nu)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\lambda \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} |\beta_\mu \beta_\nu| \cdot ||\alpha(\lambda b_\mu + \beta_\nu) f(x+\lambda y) - \frac{1}{L} \sum_{\rho \in K} f(x+\lambda y + \rho(\lambda b_\mu + b_\nu))|| +$$
$$+ \sum_{\rho \in K} \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} |\beta_\mu \beta_\nu| \cdot || \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} f(x+b_\nu + \lambda(y+\rho b_\mu)) - \alpha(y+\rho b_\mu) f(x+\rho b_\nu)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} |\beta_\mu \beta_\nu| \cdot [\sum_{\lambda \in K} \varphi(x+\lambda y, \lambda b_\mu + b_\nu) + \sum_{\rho \in K} \varphi(x+\rho b_\nu, y+\rho b_\mu)] =$$
$$= \sum_{\mu \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} |\beta_\mu \beta_\nu| \cdot \sum_{\lambda \in K} [\varphi(x+\lambda y, \lambda b_\mu + b_\nu) + \varphi(x+\lambda b_\nu, y+\lambda b_\mu)], \ x,y \in S.$$

Zachodzą także równości

$$\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\rho\in K_1}m(\rho(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu\sum_{\kappa\in K_0}f(x+\kappa\rho^{-1}b_\mu)=$$
$$=\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\rho\in K_1}m(\rho y)m(\rho\sigma\tau^{-1}b_\nu)\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu\sum_{\kappa\in K_0}f(x+\kappa\rho^{-1}b_\mu)=$$
$$=\sum_{\rho\in K_1}m(\rho y)L_0\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu m(\rho\tau^{-1}b_\nu)\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu\sum_{\kappa\in K_0}f(x+\kappa\rho^{-1}b_\mu)=$$
$$=Lm(\tau y)\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu\sum_{\kappa\in K_0}f(x+\kappa\tau^{-1}b_\mu),\ x,y\in S.$$

Dla $\tau\in K_1$ zdefiniujmy funkcje

$$g_\tau(x):=\sum_{\nu\in K_1}\frac{\beta_\nu}{Lm(\tau x)}\sum_{\sigma\in K_0}f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu),\ x\in S.$$

Wówczas dla każdego $\tau\in K_1$ mamy

$$\|\sum_{\lambda\in K_0}g_\tau(x+\lambda y)-L_0g_\tau(x)\|=\|\sum_{\lambda\in K_0}\frac{1}{Lm(\tau x+\lambda\tau y)}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0}f(x+\lambda y+\sigma\tau^{-1}b_\nu)+$$
$$-\frac{L_0}{Lm(\tau x)}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0}f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu)\|=$$
$$=\frac{1}{LL_1|m(\tau x+\tau y)|}\|L_1\sum_{\lambda\in K_0}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0}f(x+\lambda y+\lambda\sigma\tau^{-1}b_\nu)+$$
$$-Lm(\tau y)\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0}f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu)\|=$$
$$=\frac{1}{LL_1|m(\tau x+\tau y)|}\|L_1\sum_{\lambda\in K_0}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0}f(x+\lambda y+\lambda\sigma\tau^{-1}b_\nu)+$$
$$-\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\rho\in K_1}m(\rho(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu\sum_{\kappa\in K_0}f(x+\kappa\rho^{-1}b_\mu)\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{LL_1|m(\tau x+\tau y)|}\sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\sum_{\sigma\in K_0}\|L_1\sum_{\sigma\in K_0}f(x+\lambda y+\lambda\sigma\tau^{-1}b_\nu)+$$
$$-\sum_{\rho\in K_1}m(\rho(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu\sum_{\kappa\in K_0}f(x+\kappa\rho^{-1}b_\mu)\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{LL_1|m(\tau x+\tau y)|}\sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}|\beta_\mu\beta_\rho|\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu),\lambda b_\mu+b_\rho)+$$
$$+\varphi(x+\lambda b_\rho,y+\sigma\tau^{-1}b_\nu+\lambda b_\mu)]=\psi_0^\tau(x,y),\ x,y\in S.$$

Na mocy twierdzenia 2.2.3 dla każdego $\tau\in K_1$ istnieje odwzorowanie $G_\tau\colon S\to X$ takie, że

$$\sum_{\lambda\in K_0}G_\tau(x+\lambda y)=L_0G_\tau(x),\ x,y\in S,$$

$$||g_\tau(x) - G_\tau(x)|| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x) + \frac{1}{L_0}\psi_k^\tau(0, \sum_{\nu\in K_0}\nu x)], \ x \in S,$$

$$G_\tau(0) = g_\tau(0).$$

Zauważmy, że

$$||f(x) - \sum_{\tau\in K_1} m(\tau x)g_\tau(x)|| = ||f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\tau\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu)|| =$$

$$= || \sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\alpha(b_\nu)f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\nu\in K_1}\beta_\nu\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda b_\nu)|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu| \cdot ||\alpha(b_\nu)f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda b_\nu)|| \leqslant \sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\varphi(x,b_\nu), \ x\in S.$$

Na mocy twierdzeń 1.2.11 i 1.3.9 funkcja $F\colon S\to X$ dana wzorem

$$F(x) := \sum_{\tau\in K_1} m(\tau x)G_\tau(x), \ x\in S, \tag{2.3.10}$$

spełnia równanie (2.3.7) oraz

$$F(0) = \sum_{\tau\in K_1} m(\tau 0)G_\tau(0) = \sum_{\tau\in K_1} m(0)g_\tau(0) = \sum_{\tau\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\frac{\beta_\nu}{Lm(\tau 0)}\sum_{\sigma\in K_0} f(0+\sigma\tau^{-1}b_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu\in K_1}\frac{\beta_\nu}{L}\sum_{\tau\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0} f(\sigma\tau^{-1}b_\nu) = \sum_{\nu\in K_1}\frac{\beta_\nu}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda b_\nu),$$

$$||f(x) - F(x)|| \leqslant ||f(x) - \sum_{\tau\in K_1} m(\tau x)g_\tau(x)|| + ||\sum_{\tau\in K_1} m(\tau x)g_\tau(x) - \sum_{\tau\in K_1} m(\tau x)G_\tau(x)|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\varphi(x,b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1}|m(\tau x)| \, ||g_\tau(x) - G_\tau(x)|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\varphi(x,b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1}|m(\tau x)|\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x) + \frac{1}{L_0}\psi_k^\tau(0, \sum_{\nu\in K_0}\nu x)], \ x\in S,$$

co kończy dowód. □

W przypadku rzeczywistym mamy

TWIERDZENIE 2.3.6. *Załóżmy, że* $(X, ||\cdot||)$ *jest rzeczywista. Niech funkcje* $f\colon S\to X$, $\alpha\colon S\to\mathbb{C}$, $\alpha\neq const$, $\varphi\colon S\times S\to[0,\infty)$ *spełniają nierówność* (2.3.1). *Załóżmy, że funkcja* α *spełnia równanie* (2.3.2). *Wówczas istnieją homomorfizm* $m\colon S\to\mathbb{C}^*$ *oraz* $\beta_\lambda\in\mathbb{C}^*$, $b_\lambda\in S$, $\lambda\in K_1$ *takie, że*

$$\alpha(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x), \ x\in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K_1} \beta_\lambda m(\mu b_\lambda) = \begin{cases} |K_1|, & \mu \in K_0, \\ 0, & \mu \notin K_0, \end{cases}$$

$$m(x) = \sum_{\lambda\in K_1} \beta_\lambda \alpha(x + b_\lambda), \ x \in S.$$

Ponadto, jeżeli dla każdego $\tau \in K_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n^\tau(x,x) + \frac{1}{L}\psi_n^\tau(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)] < \infty, \ x \in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \psi_n^\tau(x,y) = 0, \ x, y \in S,$$

gdzie

$$\psi_0^\tau(x,y) = \frac{1}{L|K_1||m(\tau x + \tau y)|}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}|\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho|\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+$$
$$+ \lambda(y + \sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi(x + \lambda b_\rho, y + \sigma\tau^{-1}b_\nu + \lambda b_\mu)], \ x, y \in S,$$

$$\psi_n^\tau(x,y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\psi_{n-1}^\tau(x + \lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x, y + \lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y), \ x, y \in S, \ n \in \mathbb{N},$$

to istnieje odwzorowanie $F\colon S \to X$ *takie, że*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x + \lambda y) = \alpha(y)F(x), \ x, y \in S, \tag{2.3.11}$$

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \sum_{\nu\in K_1}|Re\ \beta_\nu|\varphi(x, b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1}(|Re\ m(\tau x)| + |Im\ m(\tau x)|)\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+$$
$$+ \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\sigma\in K_0}\sigma x)], \ x \in S, \tag{2.3.12}$$

$$F(0) = \sum_{\nu\in K_1}\frac{Re\ \beta_\nu}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda b_\nu). \tag{2.3.13}$$

DOWÓD. Ponieważ funkcja α spełnia równanie (2.3.2), to na mocy twierdzenia 1.3.8 istnieją homomorfizm $m\colon S \to \mathbb{C}^*$ oraz $\beta_\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b_\lambda \in S$, $\lambda \in K_1$ takie, że

$$\alpha(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x), \ x \in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K_1} \beta_\lambda m(\mu b_\lambda) = \begin{cases} |K_1|, & \mu \in K_0, \\ 0, & \mu \notin K_0, \end{cases}$$

$$m(x) = \sum_{\lambda\in K_1} \beta_\lambda \alpha(x + b_\lambda), \ x \in S.$$

Przyjmijmy $L_0 := |K_0|$, $L_1 := |K_1|$.

Zauważmy najpierw, że zachodzą nierówności

$$\|L_1 \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma y) - \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\,(\beta_\nu m(\rho y)) \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1}b_\nu)\| \leqslant \tag{2.3.14}$$
$$\leqslant \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)|\cdot[\varphi(x+\lambda y,\lambda b_\mu+b_\nu)+\varphi(x+\lambda b_\nu, y+\lambda b_\mu)],\ x,y\in S,$$

$$\|\sum_{\rho\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\,(\beta_\nu m(\rho y)) \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1}b_\nu)\| \leqslant \tag{2.3.15}$$
$$\leqslant \sum_{\lambda\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1} |\mathrm{Im}\,(\beta_\mu\beta_\nu)|\cdot[\varphi(x+\lambda y,\lambda b_\mu+b_\nu)+\varphi(x+\lambda b_\nu, y+\lambda b_\mu)],\ x,y\in S.$$

Istotnie, dla $x, y \in S$ mamy

$$\|L_1 \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma y) - \sum_{\rho\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\,(\beta_\nu m(\rho y)) \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1}b_\nu)\| =$$
$$= \|\sum_{\lambda\in K} \mathrm{Re}\,(\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu m(\lambda b_\mu)) f(x+\lambda y) - \sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\,(\beta_\nu m(\rho^{-1}y)) f(x+\rho b_\nu)\| =$$
$$= \|\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)\alpha(\lambda b_\mu+b_\nu)f(x+\lambda y)+$$
$$-\sum_{\rho\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)\alpha(y+\rho b_\mu)f(x+\rho b_\nu)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)\alpha(\lambda b_\mu+b_\nu)f(x+\lambda y)+$$
$$-\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\rho\in K} \frac{1}{L}\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)f(x+\lambda y+\rho\lambda b_\mu+\rho b_\nu)\|+$$
$$+\|\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\rho\in K} \frac{1}{L}\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)f(x+\rho b_\nu+\lambda y+\lambda\rho b_\mu)+$$
$$-\sum_{\rho\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)\alpha(y+\rho b_\mu)f(x+\rho b_\nu)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)|\cdot\|\alpha(\lambda b_\mu+b_\nu)f(x+\lambda y) - \frac{1}{L}\sum_{\rho\in K} f(x+\lambda y+\rho\lambda b_\mu+\rho b_\nu)\|+$$
$$+\sum_{\rho\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)|\cdot\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\rho b_\nu+\lambda y+\lambda\rho b_\mu) - \alpha(y+\rho b_\mu)f(x+\rho b_\nu)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)|\varphi(x+\lambda y,\lambda b_\mu+b_\nu)+$$
$$+\sum_{\rho\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)|\varphi(x+\rho b_\nu, y+\rho b_\mu) =$$
$$= \sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\nu)|\cdot[\varphi(x+\lambda y,\lambda b_\mu+b_\nu)+\varphi(x+\lambda b_\nu, y+\lambda b_\mu)],$$

a także

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{\rho\in K_1}\sum_{\nu\in K_1}\mathrm{Im}\ (\beta_\nu m(\rho y))\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\rho^{-1}b_\nu)\| = \\
&= \|\sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1}\mathrm{Im}\ (\beta_\nu m(\rho^{-1}y))f(x+\rho b_\nu) - \sum_{\lambda\in K}\mathrm{Im}\ (\sum_{\mu\in K_1}\beta_\mu m(\lambda b_\mu))f(x+\lambda y)\| = \\
&= \|\sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)\alpha(y+\rho b_\mu)f(x+\rho b_\nu)+ \\
&\qquad -\sum_{\lambda\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)\alpha(\lambda b_\mu+b_\nu)f(x+\lambda y)\| \leqslant \\
&\leqslant \|\sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)\alpha(y+\rho b_\mu)f(x+\rho b_\nu)+ \\
&\qquad -\sum_{\lambda\in K}\sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\frac{1}{L}\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)f(x+\rho b_\nu+\lambda y+\lambda\rho b_\mu)\|+ \\
&+\|\sum_{\rho\in K}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\frac{1}{L}\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)f(x+\lambda y+\rho\lambda b_\mu+\rho b_\nu)+ \\
&\qquad -\sum_{\lambda\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)\alpha(\lambda b_\mu+b_\nu)f(x+\lambda y)\| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}|\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)|\cdot\|\alpha(y+\rho b_\mu)f(x+\rho b_\nu)-\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}f(x+\rho b_\nu+\lambda y+\lambda\rho b_\mu)\|+ \\
&+\sum_{\lambda\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}|\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)|\cdot\|\frac{1}{L}\sum_{\rho\in K}f(x+\lambda y+\rho\lambda b_\mu+\rho b_\nu)-\alpha(\lambda b_\mu+b_\nu)f(x+\lambda y)\| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\rho\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}|\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)|\varphi(x+\rho b_\nu, y+\rho b_\mu)+ \\
&\qquad +\sum_{\lambda\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}|\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)|\varphi(x+\lambda y, \lambda b_\mu+b_\nu) = \\
&= \sum_{\lambda\in K}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}|\mathrm{Im}\ (\beta_\mu\beta_\nu)|\cdot[\varphi(x+\lambda b_\nu, y+\lambda b_\mu)+\varphi(x+\lambda y, \lambda b_\mu+b_\nu)].
\end{aligned}
$$

Dla $\tau\in K_1$ zdefiniujmy funkcje $g_\tau, h_\tau\colon S\to X$ wzorami

$$
g_\tau(x) := \sum_{\nu\in K_1}\mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau x)}\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu),\ x\in S,
$$

$$
h_\tau(x) := \sum_{\nu\in K_1}\mathrm{Im}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau x)}\sum_{\sigma\in K_0} f(x+\sigma\tau^{-1}b_\nu),\ x\in S.
$$

Pokażemy, że dla $\tau\in K_1$ zachodzą nierówności

$$
\|\frac{1}{L_0}\sum_{\lambda\in K_0} g_\tau(x+\lambda y)-g_\tau(x)\| \leqslant \psi_0^\tau(x,y),\ x,y\in S, \tag{2.3.16}
$$

$$
\|\frac{1}{L_0}\sum_{\lambda\in K_0} h_\tau(x+\lambda y)-h_\tau(x)\| \leqslant \psi_0^\tau(x,y)\ x,y\in S. \tag{2.3.17}
$$

Zauważmy najpierw, że dla liczb zespolonych w, z zachodzą nierówności

$$|\mathrm{Re}\ w\ \mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ w\ \mathrm{Im}\ z| \leqslant |wz|, \tag{2.3.18}$$

$$|\mathrm{Im}\ w\ \mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Re}\ w\ \mathrm{Im}\ z| \leqslant |wz|. \tag{2.3.19}$$

Ustalmy $\tau \in K_1$. Ponieważ dla $x, y \in S$ mamy

$$L_1 \sum_{\lambda\in K_0} g_\tau(x+\lambda y) = L_1 \sum_{\lambda\in K_0}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+\lambda y))} \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\lambda y+\sigma\tau^{-1}b_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0} L_1 \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu)),$$

a także

$$L_0L_1g_\tau(x) = L_0L_1 \sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\rho}{Lm(\tau x)} \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\tau^{-1}b_\rho) =$$
$$= L_0L_1 \sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\ (\frac{\beta_\rho m(\tau y)}{Lm(\tau(x+y))}) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\tau^{-1}b_\rho) =$$
$$= L_0 \sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\ (\frac{\beta_\rho m(\kappa y)}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu m(\kappa\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) =$$
$$= \sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\ (\frac{\beta_\rho m(\kappa y)}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu \sum_{\sigma\in K_0} m(\kappa\sigma\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\rho m(\kappa y) m(\kappa\sigma\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) +$$
$$- \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\rho m(\kappa y) m(\kappa\sigma\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) +$$
$$- \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho),$$

to korzystając z (2.3.14), (2.3.15), (2.3.18), dla $x, y \in S$ mamy

$$L_1 \| \sum_{\lambda\in K_0} g_\tau(x+\lambda y) - L_0 g_\tau(x) \| =$$
$$= \| \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0} L_1 \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu)) +$$
$$- \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\ (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) +$$
$$+ \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\ \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\ (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))}| \sum_{\sigma\in K_0} ||L_1 \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))+$$
$$- \sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\,(\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho)||+$$
$$+ \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))}| \sum_{\sigma\in K_0} || \sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\,(\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))}| \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} |\mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\rho)|\cdot$$
$$\cdot[\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu+\lambda b_\mu)]+$$
$$+ \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))}| \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} |\mathrm{Im}\,(\beta_\mu\beta_\rho)|\cdot$$
$$\cdot[\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu+\lambda b_\mu)] =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\lambda\in K} [|\mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \mathrm{Re}\,(\beta_\mu\beta_\rho)| + |\mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \mathrm{Im}\,(\beta_\mu\beta_\rho)|]\cdot$$
$$\cdot[\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu+\lambda b_\mu)] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\lambda\in K} \frac{|\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho|}{L|m(\tau(x+y))|} \cdot [\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho)+$$
$$+ \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu+\lambda b_\mu)] = L\psi_0^\tau(x,y),$$

co pokazuje (2.3.16). Podobnie dla $x, y \in S$ mamy

$$L_1 \sum_{\lambda\in K_0} h_\tau(x+\lambda y) = L_1 \sum_{\lambda\in K_0}\sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+\lambda y))} \sum_{\sigma\in K_0} f(x+\lambda y+\sigma\tau^{-1}b_\nu) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0} L_1 \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu)),$$

a także

$$L_0L_1h_\tau(x) = L_0L_1 \sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\, \frac{\beta_\rho}{Lm(\tau x)} \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\tau^{-1}b_\rho) =$$
$$= L_0L_1 \sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\,(\frac{\beta_\rho m(\tau y)}{Lm(\tau(x+y))}) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\tau^{-1}b_\rho) =$$
$$= L_0 \sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\,(\frac{\beta_\rho m(\kappa y)}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu m(\kappa\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) =$$
$$= \sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\,(\frac{\beta_\rho m(\kappa y)}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\nu\in K_1} \beta_\nu \sum_{\sigma\in K_0} m(\kappa\sigma\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) =$$

$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\, (\beta_\rho m(\kappa y) m(\kappa\sigma\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho)+$$
$$+ \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\, (\beta_\rho m(\kappa y) m(\kappa\sigma\tau^{-1}b_\nu)) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho) =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\, (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho)+$$
$$+ \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\, (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho).$$

Korzystając z (2.3.14), (2.3.15), (2.3.19), dla $x, y \in S$ mamy

$$L_1 \| \sum_{\lambda\in K_0} h_\tau(x+\lambda y) - L_0 h_\tau(x)\| =$$
$$= \| \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0} L_1 \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))+$$
$$- \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\, (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho)+$$
$$- \sum_{\nu\in K_1} \mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\, (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))}| \sum_{\sigma\in K_0} \|L_1 \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))+$$
$$- \sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Re}\, (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho)\|+$$
$$+ \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))}| \sum_{\sigma\in K_0} \| \sum_{\kappa\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} \mathrm{Im}\, (\beta_\rho m(\kappa(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu))) \sum_{\lambda\in K_0} f(x+\lambda\kappa^{-1}b_\rho)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))}| \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} |\mathrm{Re}\, (\beta_\mu\beta_\rho)| \cdot$$
$$\cdot [\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu + \lambda b_\mu)]+$$
$$+ \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))}| \sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1} |\mathrm{Im}\, (\beta_\mu\beta_\rho)| \cdot$$
$$\cdot [\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu + \lambda b_\mu)] =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\lambda\in K} [|\mathrm{Im}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \mathrm{Re}\, (\beta_\mu\beta_\rho)| + |\mathrm{Re}\, \frac{\beta_\nu}{Lm(\tau(x+y))} \mathrm{Im}\, (\beta_\mu\beta_\rho)|] \cdot$$
$$\cdot [\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu + \lambda b_\mu)] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\lambda\in K} \frac{|\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho|}{L|m(\tau(x+y))|} \cdot [\varphi(x+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho)+$$
$$+ \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu + \lambda b_\mu)] = L\psi_0^\tau(x,y),$$

co daje nam (2.3.17).

Na mocy twierdzenia 2.2.3 dla $\tau \in K_1$ istnieją dokładnie jedne odwzorowania $G_\tau, H_\tau \colon S \to X$ takie, że

$$\frac{1}{L_0} \sum_{\sigma \in K_0} G_\tau(x + \sigma y) = G_\tau(x), \; x, y \in S,$$

$$\frac{1}{L_0} \sum_{\sigma \in K_0} H_\tau(x + \sigma y) = H_\tau(x), \; x, y \in S,$$

$$G_\tau(0) = g_\tau(0), \; H_\tau(0) = h_\tau(0),$$

$$||g_\tau(x) - G_\tau(x)|| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} [\psi_k^\tau(x, x) + \frac{1}{L_0} \psi_k^\tau(0, \sum_{\sigma \in K_0} \sigma x)], \; x \in S,$$

$$||h_\tau(x) - H_\tau(x)|| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} [\psi_k^\tau(x, x) + \frac{1}{L_0} \psi_k^\tau(0, \sum_{\sigma \in K_0} \sigma x)], \; x \in S.$$

Niech $F \colon S \to X$ będzie dana wzorem

$$F(x) := \sum_{\tau \in K_1} [\operatorname{Re} m(\tau x) \; G_\tau(x) - \operatorname{Im} m(\tau x) \; H_\tau(x)], \; x \in S.$$

Na mocy twierdzenia 1.3.10 i 1.2.11 funkcja F spełnia równanie (2.3.11). Mamy również

$$\begin{aligned} F(0) &= \sum_{\tau \in K_1} [\operatorname{Re} m(\tau 0) G_\tau(0) - \operatorname{Im} m(\tau 0) H_\tau(0)] = \sum_{\tau \in K_1} m(0) g_\tau(0) = \\ &= \sum_{\tau \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \operatorname{Re} \frac{\beta_\nu}{L m(\tau 0)} \sum_{\sigma \in K_0} f(0 + \sigma \tau^{-1} b_\nu) = \\ &= \sum_{\nu \in K_1} \frac{\operatorname{Re} \beta_\nu}{L} \sum_{\tau \in K_1} \sum_{\sigma \in K_0} f(\sigma \tau^{-1} b_\nu) = \sum_{\nu \in K_1} \frac{\operatorname{Re} \beta_\nu}{L} \sum_{\lambda \in K} f(\lambda b_\nu). \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &||f(x) - \sum_{\tau \in K_1} \operatorname{Re} m(\tau x) \; g_\tau(x) + \sum_{\tau \in K_1} \operatorname{Im} m(\tau x) \; h_\tau(x)|| = \\ &= ||m(0) f(x) - \sum_{\tau \in K_1} \operatorname{Re} m(\tau x) \; g_\tau(x) + \sum_{\tau \in K_1} \operatorname{Im} m(\tau x) \; h_\tau(x)|| = \\ &= || \sum_{\nu \in K_1} \operatorname{Re} \beta_\nu \alpha(b_\nu) f(x) - \sum_{\tau \in K_1} \operatorname{Re} m(\tau x) \sum_{\nu \in K_1} \operatorname{Re} \frac{\beta_\nu}{L m(\tau x)} \sum_{\sigma \in K_0} f(x + \sigma \tau^{-1} b_\nu) + \\ &\quad + \sum_{\tau \in K_1} \operatorname{Im} m(\tau x) \sum_{\nu \in K_1} \operatorname{Im} \frac{\beta_\nu}{L m(\tau x)} \sum_{\sigma \in K_0} f(x + \sigma \tau^{-1} b_\nu)|| = \\ &= || \sum_{\nu \in K_1} \operatorname{Re} \beta_\nu \alpha(b_\nu) f(x) - \frac{1}{L} \sum_{\tau \in K_1} \sum_{\nu \in K_1} \operatorname{Re} \beta_\nu \sum_{\sigma \in K_0} f(x + \sigma \tau^{-1} b_\nu)|| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\nu \in K_1} |\operatorname{Re} \beta_\nu| \cdot ||\alpha(b_\nu) f(x) - \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} f(x + \lambda b_\nu)|| \leqslant \sum_{\nu \in K_1} |\operatorname{Re} \beta_\nu| \varphi(x, b_\nu), \; x \in S. \end{aligned}$$

Stąd mamy

$$\|f(x) - F(x)\| = \|f(x) - \sum_{\tau\in K_1} \mathrm{Re}\, m(\tau x)\, G_\tau(x) + \sum_{\tau\in K_1} \mathrm{Im}\, m(\tau x)\, H_\tau(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f(x) - \sum_{\tau\in K_1} \mathrm{Re}\, m(\tau x)\, g_\tau(x) + \sum_{\tau\in K_1} \mathrm{Im}\, m(\tau x)\, h_\tau(x)\| +$$

$$+ \sum_{\tau\in K_1} |\mathrm{Re}\, m(\tau x)| \cdot \|g_\tau(x) - G_\tau(x)\| + \sum_{\tau\in K_1} |\mathrm{Im}\, m(\tau x)| \cdot \|h_\tau(x) - H_\tau(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\, \beta_\nu| \varphi(x, b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1} |\mathrm{Re}\, m(\tau x)| \sum_{k=0}^{\infty} [\psi_k^\tau(x,x) + \frac{1}{L_0}\psi_k^\tau(0, \sum_{\sigma\in K_0} \sigma x)] +$$

$$+ \sum_{\tau\in K_1} |\mathrm{Im}\, m(\tau x)| \sum_{k=0}^{\infty} [\psi_k^\tau(x,x) + \frac{1}{L_0}\psi_k^\tau(0, \sum_{\sigma\in K_0} \sigma x)], \quad x\in S.$$

□

W przypadku stałej funkcji kontrolnej, z powyższych twierdzeń oraz wniosków 2.3.2, 2.3.4 otrzymujemy

WNIOSEK 2.3.7. *Niech* $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\delta > 0$ *spełniają nierówność* (2.3.4). *Wówczas zachodzi co najmniej jeden z trzech przypadków:*

(i) Funkcje f *i* α *są ograniczone.*

(ii) Funkcje f *i* α *spełniają równanie* (2.3.6).

(iii) Funkcja α *spełnia równanie* (2.3.2) *i istnieje odwzorowanie* $F\colon S \to X$ *spełniające równanie* (2.3.11) *takie, że funkcja* $f - F$ *jest ograniczona.*

Zajmiemy się teraz badaniem stabilności wspólnego uogólnienia równania Wilsona i Drygasa. Zaczniemy od pewnego pomocniczego lematu.

LEMAT 2.3.8. *Niech funkcje* $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\varphi\colon S\times S \to [0,\infty)$ *spełniają nierówność*

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\| \leqslant \varphi(x,y), \quad x,y\in S. \tag{2.3.20}$$

Wówczas zachodzi co najmniej jeden z dwóch przypadków:

(i) Istnieją $x_0, y_0 \in S$, $M > 0$ *takie, że*

$$\|f(z)\| \leqslant M \sum_{\lambda\in K} [\varphi(z, x_0+\lambda y_0) + \varphi(z+\lambda x_0, y_0) + \varphi(z, x_0) + \varphi(\lambda x_0, y_0)], \quad z\in S.$$

(ii) Funkcja α spełnia równanie (2.3.2).

Ponadto, jeżeli zachodzi warunek (i), to dla $z_0 \in S$ spełniającego $f(z_0) \neq 0$ mamy

$$|\alpha(x)| \leqslant \frac{1}{||f(z_0)||}\varphi(z_0, x) + \frac{M}{L||f(z_0)||}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K}[\varphi(z_0+\mu x, x_0+\lambda y_0) + \varphi(z_0+\mu x+\lambda x_0, y_0)+$$
$$+\varphi(z_0+\mu x, x_0) + \varphi(\mu x, x_0+\lambda y_0) + \varphi(\mu x+\lambda x_0, y_0) + \varphi(\mu x, x_0) + 2\varphi(\lambda x_0, y_0)], \ x \in S.$$

DOWÓD. Załóżmy, że nie zachodzi (i). Ustalmy $x, y \in S$. Wówczas istnieje taki ciąg $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktów ze zbioru S, że

$$||f(z_n)|| > n\max(1, |\alpha(y)|)\sum_{\lambda\in K}[\varphi(z_n, x+\lambda y) + \varphi(z_n+\lambda x, y) + \varphi(z_n, x) + \varphi(\lambda x, y)] \geqslant$$
$$\geqslant n\sum_{\lambda\in K}[\varphi(z_n, x+\lambda y) + \varphi(z_n+\lambda x, y) + |\alpha(y)|\varphi(z_n, x) + \varphi(\lambda x, y)], \ n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy, dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(x+\lambda y) - \alpha(x)\alpha(y)| \cdot ||f(z_n)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(x+\lambda y)f(z_n) + \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K}f(\mu(x+\lambda y)) - \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K}f(z_n+\mu(x+\lambda y))||+$$
$$+||\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K}f(z_n+\mu x+\lambda y) - \alpha(y)\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}f(z_n+\mu x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}f(\lambda y)||+$$
$$+|\alpha(y)| \cdot ||\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}f(z_n+\mu x) - \alpha(x)f(z_n) - \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}f(\mu x)||+$$
$$+||\alpha(y)\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}f(\mu x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}f(\lambda y) - \frac{1}{L^2}\sum_{\mu\in K}\sum_{\lambda\in K}f(\mu x+\lambda y)|| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(z_n, x+\lambda y) + \varphi(z_n+\lambda x, y) + |\alpha(y)|\varphi(z_n, x) + \varphi(\lambda x, y)] < \frac{||f(z_n)||}{Ln}.$$

Dzieląc powyższą nierówność przez $||f(z_n)||$ i zmierzając z $n \to \infty$ dostajemy

$$|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(x+\lambda y) - \alpha(x)\alpha(y)| \leqslant 0,$$

co kończy dowód (ii).

Załóżmy, że zachodzi (i). Wówczas, dla $z_0 \in S$ takiego, że $f(z_0) \neq 0$, mamy

$$|\alpha(x)| \cdot ||f(z_0)|| \leqslant ||\alpha(x)f(z_0) + \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}f(\mu x) - \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}f(z_0+\mu x)|| + \sum_{\mu\in K}||f(z_0+\mu x)||+$$
$$+\sum_{\mu\in K}||f(\mu x)|| \leqslant \varphi(z_0, x) + \frac{M}{L}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K}[\varphi(z_0+\mu x, x_0+\lambda y_0) + \varphi(z_0+\mu x+\lambda x_0, y_0)+$$
$$+\varphi(z_0+\mu x, x_0) + \varphi(\mu x, x_0+\lambda y_0) + \varphi(\mu x+\lambda x_0, y_0) + \varphi(\mu x, x_0) + 2\varphi(\lambda x_0, y_0)], \ x \in S,$$

co kończy dowód. □

Gdy w powyższym lemacie mamy stałą funkcję kontrolną, to otrzymujemy

WNIOSEK 2.3.9. *Niech $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\delta > 0$ spełniają nierówność*

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\| \leqslant \delta,\ x,y\in S. \tag{2.3.21}$$

Wówczas funkcje f i α są ograniczone lub f jest nieograniczona a odwzorowanie α spełnia równanie (2.3.2).

Pokażemy teraz twierdzenie mówiące kiedy mamy superstabilność.

TWIERDZENIE 2.3.10. *Niech $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\varphi\colon S\times S \to [0,\infty)$ spełniają nierówność* (2.3.20). *Załóżmy, że funkcja α spełnia równanie* (2.3.2). *Jeżeli*

$$\forall_{x,y\in S}\exists_{(z_n)_{n\in\mathbb{N}}} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\alpha(z_n)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda y, z_n)+\varphi(x, z_n+\lambda y)+\varphi(\lambda y, z_n)] = 0, \tag{2.3.22}$$

to funkcje f i α spełniają równanie

$$\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) = L\alpha(y)f(x) + \sum_{\lambda\in K} f(\lambda y),\ x,y\in S. \tag{2.3.23}$$

DOWÓD. Dla $x,y\in S$ oraz ciągu $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego warunek (2.3.22), mamy

$$\begin{aligned}
&\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\| = \\
&= \frac{1}{|\alpha(z_n)|}\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(z_n)f(x+\lambda y) - \alpha(z_n)\alpha(y)f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(z_n)f(\lambda y)\| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{|\alpha(z_n)|}[\ \|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(z_n)f(x+\lambda y) + \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(\mu z_n) - \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(x+\lambda y+\mu z_n)\|+ \\
&+\|\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(x+\mu(z_n+\lambda y)) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(z_n+\lambda y)f(x) - \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(\mu(z_n+\lambda y))\|+ \\
&\quad+\|\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(\lambda y+\mu z_n) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(z_n)f(\lambda y) - \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(\mu z_n)\|\ ] \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{L|\alpha(z_n)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda y, z_n)+\varphi(x, z_n+\lambda y)+\varphi(\lambda y, z_n)] \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

□

WNIOSEK 2.3.11. *Niech $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\delta > 0$ spełniają nierówność* (2.3.21). *Załóżmy, że funkcja f nie jest ograniczona. Jeżeli odwzorowanie α nie jest ograniczone, to funkcje f i α spełniają równanie* (2.3.23).

Teraz pokażemy kiedy mamy stabilność.

Udowodnimy najpierw pewien pomocniczy lemat.

LEMAT 2.3.12. *Niech $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{K}$, $\varphi\colon S\times S \to [0,\infty)$ spełniają nierówność* (2.3.20). *Załóżmy, że istnieje $y_0 \in S$ spełniające $\alpha(y_0) \neq 1$. Wówczas funkcje $p, q\colon S \to X$ dane wzorami*

$$p(x) := f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x), \quad x \in S,$$

$$q(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x), \quad x \in S,$$

spełniają warunki:

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} p(x+\lambda y) - \alpha(y)p(x)\| \leqslant \varphi(x,y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x, y), \quad x,y \in S,$$

$$\|q(x) - (1-\alpha(x))\frac{q(y_0)}{1-\alpha(y_0)}\| \leqslant \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)], \quad x \in S.$$

DOWÓD. Zauważmy, że

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} p(x+\lambda y) - \alpha(y)p(x)\| \leqslant \|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\| +$$

$$+ \|\alpha(y)\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(\mu x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y) - \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(\mu x + \lambda y)\| \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(x,y) + \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}\varphi(\mu x, y), \quad x,y \in S.$$

Mamy również

$$\|(1-\alpha(y_0))q(x) - (1-\alpha(x))q(y_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\alpha(y_0)\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(\mu x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y_0) - \frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(\mu x + \lambda y_0)\| +$$

$$+ \|\frac{1}{L^2}\sum_{\lambda\in K}\sum_{\mu\in K} f(\lambda y_0 + \mu x) - \alpha(x)\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y_0) - \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(\mu x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}\varphi(\mu x, y_0) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda y_0, x), \quad x \in S.$$

Dzieląc powyższą nierówność przez $(1-\alpha(y_0))$ otrzymujemy drugi warunek tezy. □

Rozważymy najpierw przypadek zespolony.

TWIERDZENIE 2.3.13. *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest zespolona. Niech funkcje $f\colon G \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{C}$, $\alpha \neq const$, $\varphi\colon S\times S \to [0,\infty)$ spełniają nierówność* (2.3.20). *Załóżmy, że funkcja α spełnia równanie* (2.3.2). *Wówczas istnieją homomorfizm $m\colon S \to \mathbb{C}^*$ oraz $\beta_\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b_\lambda \in S$,*

$\lambda \in K_1$ takie, że

$$\alpha(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x),\ x \in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K_1} \beta_\lambda m(\mu b_\lambda) = \begin{cases} |K_1|, & \mu \in K_0, \\ 0, & \mu \notin K_0. \end{cases}$$

$$m(x) = \sum_{\lambda\in K_1} \beta_\lambda \alpha(x + b_\lambda),\ x \in S.$$

Ponadto, jeżeli dla każdego $\tau \in K_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n^\tau(x,x) + \frac{1}{L}\psi_n^\tau(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)] < \infty,\ x \in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \psi_n^\tau(x,y) = 0,\ x, y \in S,$$

gdzie

$$\varphi_0(x,y) = \varphi(x,y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x, y),\ x, y \in S,$$

$$\psi_0^\tau(x,y) = \frac{1}{L|K_1||m(\tau x + \tau y)|}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}|\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho|\sum_{\lambda\in K}[\varphi_0(x+$$

$$+\lambda(y + \sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi_0(x + \lambda b_\rho, y + \sigma\tau^{-1}b_\nu + \lambda b_\mu)],\ x, y \in S,$$

$$\psi_n^\tau(x,y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\psi_{n-1}^\tau(x + \lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x, y + \lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y),\ x, y \in S,\ n \in \mathbb{N},$$

to istnieją odwzorowanie $F\colon S \to X$ oraz $y_0 \in S$ spełniające $\alpha(y_0) \neq 1$ takie, że

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x + \lambda y) = \alpha(y)F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda y),\ x, y \in S, \tag{2.3.24}$$

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\cdot\varphi_0(x, b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1}|m(\tau x)|\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x) + \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\nu\in K_0}\nu x)]+$$

$$+\frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)],\ x \in S, \tag{2.3.25}$$

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda x)\| \leqslant \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)],\ x \in S. \tag{2.3.26}$$

DOWÓD. Korzystając z poprzedniego lematu oraz twierdzenia 2.3.5 dla funkcji $p\colon S \to X$ danej wzorem

$$p(x) := f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x),\ x \in S,$$

dostajemy istnienie takiego odwzorowania $P\colon S \to X$, że

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} P(x+\lambda y) = \alpha(y)P(x),\ x,y\in S,$$

$$||p(x)-P(x)|| \leqslant \sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\varphi_0(x,b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1}|m(\tau x)|\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+\frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0,\sum_{\nu\in K_0}\nu x)],\ x\in S,$$

$$P(0) = \sum_{\nu\in K_1}\frac{\beta_\nu}{L}\sum_{\lambda\in K}p(\lambda b_\nu) = \sum_{\nu\in K_1}\frac{\beta_\nu}{L}[\sum_{\lambda\in K}f(\lambda b_\nu) - \sum_{\lambda\in K}\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K}f(\mu\lambda b_\nu)] =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1}\frac{\beta_\nu}{L}[\sum_{\lambda\in K}f(\lambda b_\nu) - \sum_{\lambda\in K}f(\lambda b_\nu)] = 0.$$

Również z poprzedniego lematu dla odwzorowania $q\colon S \to X$ danego wzorem

$$q(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x),\ x\in S,$$

oraz dla $y_0 \in S$ spełniającego $\alpha(y_0) \neq 1$ mamy

$$||q(x)-(1-\alpha(x))\frac{q(y_0)}{1-\alpha(y_0)}|| \leqslant \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x,y_0)+\varphi(\lambda y_0,x)],\ x\in S.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $F\colon S \to X$ wzorem

$$F(x) = P(x) + (1-\alpha(x))\frac{q(y_0)}{1-\alpha(y_0)},\ x\in S.$$

Wówczas, przyjmując $c := \frac{q(y_0)}{1-\alpha(y_0)}$, mamy

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(\lambda y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}P(\lambda y) + (1-\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(\lambda y))c = \alpha(y)P(0) + (1-\alpha(y))c =$$
$$= (1-\alpha(y))c,\ y\in S,$$

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(x+\lambda y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}P(x+\lambda y) + (1-\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(x+\lambda y))c =$$
$$= \alpha(y)P(x) + (1-\alpha(y)\alpha(x))c = \alpha(y)[P(x)+(1-\alpha(x))c] + (1-\alpha(y))c =$$
$$= \alpha(y)F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(\lambda y),\ x,y\in S,$$

a także

$$||f(x)-F(x)|| \leqslant ||p(x)-P(x)|| + ||q(x)-(1-\alpha(x))c|| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\varphi_0(x,b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1}|m(\tau x)|\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+\frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0,\sum_{\nu\in K_0}\nu x)]+$$
$$+\frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x,y_0)+\varphi(\lambda y_0,x)],\ x\in S,$$

$$\begin{aligned}&\|\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x) - \sum_{\lambda\in K} F(\lambda x)\| = \|q(x) - (1-\alpha(x))c\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)],\ x \in S,\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

W przypadku rzeczywistym mamy

TWIERDZENIE 2.3.14. *Załóżmy, że* $(X, \|\cdot\|)$ *jest rzeczywista. Niech funkcje* $f\colon S \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{C}$, $\alpha \neq const$, $\varphi\colon S\times S \to [0,\infty)$ *spełniają nierówność* (2.3.20). *Załóżmy, że funkcja* α *spełnia równanie* (2.3.2). *Wówczas istnieją homomorfizm* $m\colon S \to \mathbb{C}^*$ *oraz* $\beta_\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b_\lambda \in S$, $\lambda \in K_1$ *takie, że*

$$\alpha(x) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x),\ x\in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda m(\mu b_\lambda) = \begin{cases} |K_1|, & \mu \in K_0,\\ 0, & \mu\notin K_0,\end{cases}$$

$$m(x) = \sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda\alpha(x+b_\lambda),\ x\in S.$$

Ponadto, jeżeli dla każdego $\tau \in K_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n^\tau(x,x) + \frac{1}{L}\psi_n^\tau(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)] < \infty,\ x\in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\psi_n^\tau(x,y) = 0,\ x,y\in S,$$

gdzie

$$\varphi_0(x,y) = \varphi(x,y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x, y),\ x,y\in S,$$

$$\begin{aligned}\psi_0^\tau(x,y) = {}&\frac{1}{L|K_1||m(\tau x+\tau y)|}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}|\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho|\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\\ &+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \varphi(x+\lambda b_\rho, y+\sigma\tau^{-1}b_\nu + \lambda b_\mu)],\ x,y\in S,\end{aligned}$$

$$\psi_n^\tau(x,y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\psi_{n-1}^\tau(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x, y+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y),\ x,y\in S,\ n\in\mathbb{N},$$

to istnieją odwzorowanie $F\colon S\to X$ *oraz* $y_0\in S$ *spełniające* $\alpha(y_0)\neq 1$ *takie, że*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(x+\lambda y) = \alpha(y)F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(\lambda y),\ x,y\in S, \tag{2.3.27}$$

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \sum_{\nu\in K_1} |Re\ \beta_\nu|\varphi_0(x,b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1} (|Re\ m(\tau x)| + |Im\ m(\tau x)|) \sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+$$
$$+ \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\sigma\in K_0}\sigma x)] + \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)],\ x \in S, \tag{2.3.28}$$

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda x)\| \leqslant \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)],\ x \in S. \tag{2.3.29}$$

DOWÓD. Korzystając z lematu 2.3.12 oraz twierdzenia 2.3.6 dla funkcji $p\colon S \to X$ danej wzorem

$$p(x) := f(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x),\ x \in S,$$

dostajemy istnienie takiego odwzorowania $P\colon S \to X$, że

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} P(x+\lambda y) = \alpha(y)P(x),\ x, y \in S,$$

$$\|p(x) - P(x)\| \leqslant \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\ \beta_\nu|\varphi_0(x,b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1} (|\mathrm{Re}\ m(\tau x)| + |\mathrm{Im}\ m(\tau x)|) \sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+$$
$$+ \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\sigma\in K_0}\sigma x)],\ x \in S,$$

$$P(0) = \sum_{\nu\in K_1}\frac{\mathrm{Re}\ \beta_\nu}{L}\sum_{\lambda\in K} p(\lambda b_\nu) = \sum_{\nu\in K_1}\frac{\mathrm{Re}\ \beta_\nu}{L}[\sum_{\lambda\in K} f(\lambda b_\nu) - \sum_{\lambda\in K}\frac{1}{L}\sum_{\mu\in K} f(\mu\lambda b_\nu)] =$$
$$= \sum_{\nu\in K_1}\frac{\mathrm{Re}\ \beta_\nu}{L}[\sum_{\lambda\in K} f(\lambda b_\nu) - \sum_{\lambda\in K} f(\lambda b_\nu)] = 0.$$

Również z poprzedniego lematu dla odwzorowania $q\colon S \to X$ danego wzorem

$$q(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x),\ x \in S,$$

oraz dla $y_0 \in S$ spełniającego $\alpha(y_0) \neq 1$ mamy

$$\|q(x) - (1-\alpha(x))\frac{q(y_0)}{1-\alpha(y_0)}\| \leqslant \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)],\ x \in S.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $F\colon S \to X$ wzorem

$$F(x) = P(x) + (1-\alpha(x))\frac{q(y_0)}{1-\alpha(y_0)},\ x \in S.$$

Wówczas, przyjmując $c := \frac{q(y_0)}{1-\alpha(y_0)}$, mamy

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} P(\lambda y) + (1 - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(\lambda y))c = \alpha(y)P(0) + (1-\alpha(y))c =$$
$$= (1-\alpha(y))c,\ y \in S,$$

a także

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} P(x+\lambda y) + (1 - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(x+\lambda y))c =$$
$$= \alpha(y)P(x) + (1-\alpha(y)\alpha(x))c = \alpha(y)[P(x) + (1-\alpha(x))c] + (1-\alpha(y))c =$$
$$= \alpha(y)F(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda y),\ x,y\in S.$$

Stąd

$$||f(x) - F(x)|| \leqslant ||p(x) - P(x)|| + ||q(x) - (1-\alpha(x))c|| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\ \beta_\nu|\varphi(x,b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1}(|\mathrm{Re}\ m(\tau x)| + |\mathrm{Im}\ m(\tau x)|)\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+$$
$$+\frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0,\sum_{\sigma\in K_0}\sigma x)] + \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)],\ x\in S,$$
$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(\lambda x)|| = ||q(x) - (1-\alpha(y))c|| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(\lambda x, y_0) + \varphi(\lambda y_0, x)],\ x\in S.$$

co kończy dowód. □

W przypadku stałej funkcji kontrolnej z powyższych twierdzeń oraz wniosków 2.3.9, 2.3.11 otrzymujemy

WNIOSEK 2.3.15. *Niech $f\colon S\to X$, $\alpha\colon S\to\mathbb{K}$, $\delta>0$ spełniają nierówność* (2.3.21). *Wówczas zachodzi co najmniej jeden z trzech przypadków:*

(i) Funkcje f i α są ograniczone.

(ii) Funkcje f i α spełniają równanie (2.3.23).

(iii) Funkcja α spełnia równanie (2.3.2) *i istnieje odwzorowanie $F\colon S\to X$ spełniające równanie* (2.3.24) *takie, że funkcja $f-F$ jest ograniczona.*

Zanim przejdziemy do badania stabilności w największym uogólnieniu, udowodnimy następujący

LEMAT 2.3.16. *Niech $f,g,h\colon S\to X$, $\alpha\colon S\to\mathbb{K}$, $\varphi\colon S\times S\to[0,\infty)$ spełniają nierówność*

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)g(x) - h(y)|| \leqslant \varphi(x,y),\ x,y\in S. \tag{2.3.30}$$

Wówczas odwzorowanie $q\colon S\to X$ dane wzorem

$$q(x) := \alpha(0)[g(x) - g(0)],\ x\in S,$$

spełnia nierówność

$$\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(x+\lambda y) - \alpha_0(y)q(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda y)\Big\| \leqslant \varphi(x,y) + \varphi(0,y) +$$
$$+\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda y,0)+\varphi(\lambda y,0)],\ \ x,y\in S.$$

Ponadto

$$\|f(x) - q(x) - \alpha(0)g(0) - h(0)\| \leqslant \varphi(x,0),\ \ x\in S,$$
$$\Big\|h(x) - h(0) - (\alpha(0)-\alpha(x))g(0) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x)\Big\| \leqslant \varphi(0,x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x,0),\ \ x\in S.$$

DOWÓD. Zauważmy, że

$$\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(x+\lambda y) - \alpha_0(y)q(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda y)\Big\| =$$
$$= \Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(0)[g(x+\lambda y)-g(0)] - \alpha(y)[g(x)-g(0)] - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(0)[g(\lambda y)-g(0)]\Big\| =$$
$$= \Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(0)g(x+\lambda y) - \alpha(y)g(x) + \alpha(y)g(0) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(0)g(\lambda y)\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\alpha(0)g(x+\lambda y) + h(0) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y)\Big\| +$$
$$+\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)g(x) - h(y)\Big\| + \Big\|\alpha(y)g(0) + h(y) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y)\Big\| +$$
$$+\Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda y) - \alpha(0)\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} g(\lambda y) - h(0)\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(x,y) + \varphi(0,y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda y,0)+\varphi(\lambda y,0)],\ \ x,y\in S.$$

Mamy również

$$\|f(x) - q(x) - \alpha(0)g(0) - h(0)\| = \|f(x) - \alpha(0)[g(x)-g(0)] - \alpha(0)g(0) - h(0)\| =$$
$$= \|f(x) - \alpha(0)g(x) - h(0)\| \leqslant \varphi(x,0),\ \ x\in S,$$
$$\Big\|h(x) - h(0) - (\alpha(0)-\alpha(x))g(0) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x)\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \Big\|\alpha(x)g(0) + h(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x)\Big\| + \Big\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x) - \alpha(0)g(0) - h(0)\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(0,x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x,0),\ \ x\in S.$$

□

Twierdzenie stabilnościowe w największej ogólności zaczniemy od przypadku zespolonego.

TWIERDZENIE 2.3.17. *Załóżmy, że* $(X, \|\cdot\|)$ *jest zespolona. Niech funkcje* $f, g, h\colon G \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{C}$, $\alpha \neq const$, $\alpha(0) \neq 0$, $\varphi\colon S \times S \to [0, \infty)$ *spełniają nierówność* (2.3.30). *Załóżmy, że funkcja* $\alpha_0 := \frac{\alpha}{\alpha(0)}$ *spełnia równanie* (2.3.2). *Wówczas istnieją homomorfizm* $m\colon S \to \mathbb{C}^*$ *oraz* $\beta_\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b_\lambda \in S$, $\lambda \in K_1$ *takie, że*

$$\alpha(x) = \alpha(0)\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x), \quad x \in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K_1} \beta_\lambda m(\mu b_\lambda) = \begin{cases} |K_1|, & \mu \in K_0, \\ 0, & \mu \notin K_0, \end{cases}$$

$$m(x) = \sum_{\lambda\in K_1} \beta_\lambda \alpha_0(x + b_\lambda), \quad x \in S.$$

Ponadto, jeżeli dla każdego $\tau \in K_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n^\tau(x,x) + \frac{1}{L}\psi_n^\tau(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)] < \infty, \quad x \in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \psi_n^\tau(x,y) = 0, \quad x, y \in S,$$

gdzie

$$\theta(x,y) = \varphi(x,y) + \varphi(0,y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda y, 0) + \varphi(\lambda y, 0)], \quad x,y \in S,$$

$$\theta_0(x,y) = \theta(x,y) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\theta(\lambda x, y), \quad x,y \in S,$$

$$\psi_0^\tau(x,y) = \frac{1}{L|K_1||m(\tau x + \tau y)|}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}|\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho|\sum_{\lambda\in K}[\theta_0(x+$$
$$+ \lambda(y + \sigma\tau^{-1}b_\nu), \lambda b_\mu + b_\rho) + \theta_0(x + \lambda b_\rho, y + \sigma\tau^{-1}b_\nu + \lambda b_\mu)], \quad x, y \in S,$$

$$\psi_n^\tau(x,y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\psi_{n-1}^\tau(x + \lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x, y + \lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y), \quad x,y \in S, \ n \in \mathbb{N},$$

to istnieją odwzorowania $F, G, H\colon S \to X$ *oraz* $y_0 \in S$ *spełniające* $\alpha(y_0) \neq \alpha(0)$ *takie, że*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(x+\lambda y) = \alpha(y)G(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}H(\lambda y), \quad x, y \in S, \tag{2.3.31}$$

$$\|f(x) - F(x)\| \leqslant \varphi(x,0)\sum_{\nu\in K_1}|\beta_\nu|\theta_0(x, b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1}|m(\tau x)|\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+$$
$$+ \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\nu\in K_0}\nu x)] + \frac{1}{L|1-\alpha_0(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \quad x \in S, \tag{2.3.32}$$

$$||g(x) - G(x)|| \leqslant \sum_{\nu \in K_1} |\frac{\beta_\nu}{\alpha(0)}| \theta_0(x, b_\nu) + \sum_{\tau \in K_1} |\frac{m(\tau x)}{\alpha(0)}| \sum_{k=0}^{\infty} [\psi_k^\tau(x, x) + \frac{1}{|K_0|} \psi_k^\tau(0, \sum_{\nu \in K_0} \nu x)] +$$
$$+ \frac{1}{L|\alpha(0) - \alpha(y_0)|} \sum_{\lambda \in K} [\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x \in S, \tag{2.3.33}$$
$$||h(x) - H(x)|| \leqslant \varphi(0, x) + \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} \varphi(\lambda x, 0) + \frac{1}{L|1 - \alpha_0(y_0)|} \sum_{\lambda \in K} [\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x \in S. \tag{2.3.34}$$

DOWÓD. Korzystając z poprzedniego lematu oraz twierdzenia 2.3.13 dla funkcji $q\colon S \to X$ danej wzorem

$$q(x) := \alpha(0)[g(x) - g(0)], \ x \in S,$$

dostajemy istnienie takiego odwzorowania $Q\colon S \to X$, że

$$\frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} Q(x + \lambda y) = \alpha_0(y) Q(x) + \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} Q(\lambda y), \ x, y \in S,$$
$$||q(x) - Q(x)|| \leqslant \sum_{\nu \in K_1} |\beta_\nu| \theta_0(x, b_\nu) + \sum_{\tau \in K_1} |m(\tau x)| \sum_{k=0}^{\infty} [\psi_k^\tau(x, x) + \frac{1}{|K_0|} \psi_k^\tau(0, \sum_{\nu \in K_0} \nu x)] +$$
$$+ \frac{1}{L|1 - \alpha(y_0)|} \sum_{\lambda \in K} [\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x \in S,$$
$$||\frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} q(\lambda x) - \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} Q(\lambda x)|| \leqslant \frac{1}{L|1 - \alpha_0(y_0)|} \sum_{\lambda \in K} [\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x \in S.$$

Zdefiniujmy odwzorowania $F, G, H\colon S \to X$ wzorami

$$F(x) := Q(x) + \alpha(0) g(0) + h(0), \ x \in S,$$
$$G(x) := \frac{1}{\alpha(0)} Q(x) + g(0), \ x \in S,$$
$$H(x) := \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} Q(\lambda x) + (\alpha(0) - \alpha(x)) g(0) + h(0), \ x \in S.$$

Wówczas mamy

$$\frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} F(x + \lambda y) = \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} Q(x + \lambda y) + \alpha(0) g(0) + h(0) =$$
$$= \alpha_0(y) Q(x) + \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} Q(\lambda y) + \alpha(0) g(0) + h(0) = \alpha(y) [\frac{1}{\alpha(0)} Q(x) + g(0)] +$$
$$+ \frac{1}{L} \sum_{\lambda \in K} Q(\lambda y) + (\alpha(0) - \alpha(y)) g(0) + h(0) = \alpha(y) G(x) + H(y), \ x, y \in S.$$

Dalej, korzystając z lematu 2.3.16 dostajemy

$$\begin{aligned}
\|f(x) - F(x)\| &= \|f(x) - Q(x) - \alpha(0)g(0) - h(0)\| \leqslant \|f(x) - q(x) - \alpha(0)g(0) - h(0)\| + \\
&+ \|q(x) - Q(x)\| \leqslant \varphi(x,0) + \sum_{\nu\in K_1} |\beta_\nu|\theta_0(x, b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1} |m(\tau x)| \sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x) + \\
&+ \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\nu\in K_0} \nu x)] + \frac{1}{L|1-\alpha_0(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x\in S, \\
\|g(x) - G(x)\| &= \|g(x) - \frac{1}{\alpha(0)}Q(x) - g(0)\| = \frac{1}{|\alpha(0)|}\|q(x) - Q(x)\| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\nu\in K_1} |\frac{\beta_\nu}{\alpha(0)}|\theta_0(x, b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1} |\frac{m(\tau x)}{\alpha(0)}| \sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x) + \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\nu\in K_0}\nu x)] + \\
&+ \frac{1}{L|\alpha(0) - \alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x\in S, \\
\|h(x) - H(x)\| &= \|h(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x) - (\alpha(0) - \alpha(x))g(0) - h(0)\| \leqslant \\
&\leqslant \|h(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x) - (\alpha(0) - \alpha(x))g(0) - h(0)\| + \|\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x) - \sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x)\| \leqslant \\
&\leqslant \varphi(0,x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x, 0) + \frac{1}{L|1-\alpha_0(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x\in S,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

W przypadku rzeczywistym mamy

TWIERDZENIE 2.3.18. *Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest rzeczywista. Niech funkcje $f, g, h\colon G \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{C}$, $\alpha \neq const$, $\alpha(0) \neq 0$, $\varphi\colon S\times S \to [0,\infty)$ spełniają nierówność* (2.3.30). *Załóżmy, że funkcja $\alpha_0 := \frac{\alpha}{\alpha(0)}$ spełnia równanie* (2.3.2). *Wówczas istnieją homomorfizm $m\colon S \to \mathbb{C}^*$ oraz $\beta_\lambda \in \mathbb{C}^*$, $b_\lambda \in S$, $\lambda \in K_1$ takie, że*

$$\alpha(x) = \alpha(0)\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} m(\lambda x), \ x\in S,$$

$$\sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda m(\mu b_\lambda) = \begin{cases} |K_1|, & \mu\in K_0, \\ 0, & \mu\notin K_0, \end{cases}$$

$$m(x) = \sum_{\lambda\in K_1}\beta_\lambda\alpha_0(x + b_\lambda), \ x\in S.$$

Ponadto, jeżeli dla każdego $\tau\in K_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n^\tau(x,x) + \frac{1}{L}\psi_n^\tau(0, \sum_{\nu\in K}\nu x)] < \infty, \ x\in S,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\psi_n^\tau(x,y) = 0, \ x, y\in S,$$

gdzie

$$\theta(x,y)=\varphi(x,y)+\varphi(0,y)+\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}[\varphi(x+\lambda y,0)+\varphi(\lambda y,0)],\ \ x,y\in S,$$

$$\theta_0(x,y)=\theta(x,y)+\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\theta(\lambda x,y),\ \ x,y\in S,$$

$$\psi_0^\tau(x,y)=\frac{1}{L|K_1||m(\tau x+\tau y)|}\sum_{\nu\in K_1}\sum_{\sigma\in K_0}\sum_{\mu\in K_1}\sum_{\rho\in K_1}|\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho|\sum_{\lambda\in K}[\theta_0(x+$$

$$+\lambda(y+\sigma\tau^{-1}b_\nu),\lambda b_\mu+b_\rho)+\theta_0(x+\lambda b_\rho,y+\sigma\tau^{-1}b_\nu+\lambda b_\mu)],\ \ x,y\in S,$$

$$\psi_n^\tau(x,y)=\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K\setminus\{id\}}\psi_{n-1}^\tau(x+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu x,y+\lambda\sum_{\mu\in K\setminus\{id\}}\mu y),\ \ x,y\in S,\ n\in\mathbb{N},$$

to istnieją odwzorowania $F,G,H\colon S\to X$ *oraz* $y_0\in S$ *spełniające* $\alpha(y_0)\neq\alpha(0)$ *takie, że*

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}F(x+\lambda y)=\alpha(y)G(x)+\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}H(\lambda y),\ \ x,y\in S,\tag{2.3.35}$$

$$\begin{aligned}||f(x)-F(x)||\leqslant&\sum_{\nu\in K_1}|Re\ \beta_\nu|\cdot\theta_0(x,b_\nu)+\sum_{\tau\in K_1}[|Re\ m(\tau x)|+|Im\ m(\tau x)|]\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+\\&+\frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0,\sum_{\nu\in K_0}\nu x)]+\frac{1}{L|1-\alpha_0(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x,y_0)+\theta(\lambda y_0,x)],\ \ x\in S,\end{aligned}\tag{2.3.36}$$

$$\begin{aligned}||g(x)-G(x)||\leqslant&\sum_{\nu\in K_1}|\frac{Re\ \beta_\nu}{\alpha(0)}|\theta_0(x,b_\nu)+\sum_{\tau\in K_1}\frac{|Re\ m(\tau x)|+|Im\ m(\tau x)|}{|\alpha(0)|}\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+\\&+\frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0,\sum_{\nu\in K_0}\nu x)]+\frac{1}{L|\alpha(0)-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x,y_0)+\theta(\lambda y_0,x)],\ \ x\in S,\end{aligned}\tag{2.3.37}$$

$$||h(x)-H(x)||\leqslant\varphi(0,x)+\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x,0)+\frac{1}{L|1-\alpha_0(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x,y_0)+\theta(\lambda y_0,x)],\ \ x\in S.\tag{2.3.38}$$

Dowód. Korzystając z lematu 2.3.16 oraz twierdzenia 2.3.14 dla funkcji $q\colon S\to X$ danej wzorem

$$q(x):=\alpha(0)[g(x)-g(0)],\ \ x\in S,$$

dostajemy istnienie takiego odwzorowania $Q\colon S\to X$, że

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}Q(x+\lambda y)=\alpha_0(y)Q(x)+\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}Q(\lambda y),\ \ x,y\in S,$$

$$\begin{aligned}||q(x)-Q(x)||\leqslant&\sum_{\nu\in K_1}|\mathrm{Re}\ \beta_\nu|\theta_0(x,b_\nu)+\sum_{\tau\in K_1}[|\mathrm{Re}\ m(\tau x)|+|\mathrm{Im}\ m(\tau x)|]\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x)+\\&+\frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0,\sum_{\nu\in K_0}\nu x)]+\frac{1}{L|1-\alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x,y_0)+\theta(\lambda y_0,x)],\ \ x\in S,\end{aligned}$$

$$\|\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x)\| \leqslant \frac{1}{L|1-\alpha_0(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x \in S.$$

Zdefiniujmy odwzorowania $F, G, H\colon S \to X$ wzorami

$$F(x) := Q(x) + \alpha(0)g(0) + h(0), \ x \in S,$$

$$G(x) := \frac{1}{\alpha(0)}Q(x) + g(0), \ x \in S,$$

$$H(x) := \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x) + (\alpha(0) - \alpha(x))g(0) + h(0), \ x \in S.$$

Wówczas mamy

$$\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} F(x+\lambda y) = \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(x+\lambda y) + \alpha(0)g(0) + h(0) =$$
$$= \alpha_0(y)Q(x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda y) + \alpha(0)g(0) + h(0) = \alpha(y)[\frac{1}{\alpha(0)}Q(x) + g(0)] +$$
$$+ \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda y) + (\alpha(0) - \alpha(y))g(0) + h(0) = \alpha(y)G(x) + H(y), \ x, y \in S,$$

a także korzystając z lematu 2.3.16 dostajemy

$$\|f(x) - F(x)\| = \|f(x) - Q(x) - \alpha(0)g(0) - h(0)\| \leqslant \|f(x) - q(x) - \alpha(0)g(0) - h(0)\| +$$
$$+ \|q(x) - Q(x)\| \leqslant \varphi(x,0) + \sum_{\nu\in K_1} |\mathrm{Re}\,\beta_\nu|\theta_0(x, b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1} [|\mathrm{Re}\,m(\tau x)| + |\mathrm{Im}\,m(\tau x)|]\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x) + \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\nu\in K_0}\nu x)] + \frac{1}{L|1-\alpha_0(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x \in S,$$

$$\|g(x) - G(x)\| = \|g(x) - \frac{1}{\alpha(0)}Q(x) - g(0)\| = \frac{1}{|\alpha(0)|}\|q(x) - Q(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu\in K_1} \frac{|\mathrm{Re}\,\beta_\nu|}{|\alpha(0)|}\theta_0(x, b_\nu) + \sum_{\tau\in K_1} \frac{|\mathrm{Re}\,m(\tau x)| + |\mathrm{Im}\,m(\tau x)|}{|\alpha(0)|}\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k^\tau(x,x) +$$
$$+ \frac{1}{|K_0|}\psi_k^\tau(0, \sum_{\nu\in K_0}\nu x)] + \frac{1}{L|\alpha(0) - \alpha(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x \in S,$$

$$\|h(x) - H(x)\| = \|h(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x) - (\alpha(0) - \alpha(x))g(0) - h(0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|h(x) - \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x) - (\alpha(0) - \alpha(x))g(0) - h(0)\| + \|\sum_{\lambda\in K} q(\lambda x) - \sum_{\lambda\in K} Q(\lambda x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(0,x) + \frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K}\varphi(\lambda x, 0) + \frac{1}{L|1-\alpha_0(y_0)|}\sum_{\lambda\in K}[\theta(\lambda x, y_0) + \theta(\lambda y_0, x)], \ x \in S,$$

co kończy dowód.

Z powyższych twierdzeń, wniosku 2.3.15 oraz lematu 2.3.16, otrzymujemy

WNIOSEK 2.3.19. *Niech funkcje* $f, g, h\colon G \to X$, $\alpha\colon S \to \mathbb{C}$, $\alpha \neq const$, $\alpha(0) \neq 0$, $\delta > 0$ *spełniają nierówność*

$$||\frac{1}{L}\sum_{\lambda\in K} f(x+\lambda y) - \alpha(y)g(x) - h(y)|| \leqslant \delta.$$

Niech dalej $\alpha_0 := \frac{\alpha}{\alpha(0)}$. *Wówczas zachodzi co najmniej jeden z dwóch przypadków:*

(i) Funkcje f, g, h *i* α *są ograniczone.*

(ii) Funkcja α_0 *spełnia równanie* (2.3.2) *i istnieją odwzorowania* $F, G, H\colon S \to X$ *spełniające równanie* (2.3.31) *takie, że funkcje* $f - F$, $g - G$, $h - H$ *są ograniczone.*

Bibliografia

[1] J. Aczél, Lectures on functional equations and their applications, New York, Academic Press, 1966.

[2] J. Aczél, J. Dhombres, Functional equations in several variables, *Cambridge University Press*, 1989.

[3] T. Aoki, On the stability of the linear transformation in Banach spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **2** (1950), 64–66.

[4] R. Badora, On Hyers-Ulam stability of Wilson's functional equation, *Aequationes Math.*, **60** (2000), 211–218.

[5] R. Badora, On the stability of a functional equation for generalized trigonometric functions, *T.M. Rassias (ed.), Functional Equations and Inequalities*, 2000 Kluwer Academic Publishers, 1–5.

[6] R. Badora, On a generalized Wilson functional equation, *Georgian Math. J.*, **12** (2005), no. 4, 595–606.

[7] R. Badora, Stability properties of some functional equations, *Functional Equations in Mathematical Analysis*, **52** (2012), 3–13.

[8] C. Borelli, G. L. Forti, On a general Hyers-Ulam stability result, *Internat. J. Math. Sci.*, **18** (1995), 229–236.

[9] B. Bouikhalene, A. Charifi, E. Elqorachi, Hyers-Ulam-Rassias stability of a generalized Pexider functional equation, *Banach. J. Math. Anal.*, **1** (2007), no. 2, 176–185.

[10] B. Bouikhalene, A. Charifi, E. Elqorachi, A. Redouani, Hyers-Ulam-Rassias stability of a generalized Jensen functional equation, *AJMAA*, **6** (2009), no. 1, 1–16.

[11] W. Chojnacki, Group representations of bounded cosine functions, Technical report of the University of Adelaide, TR94–09 (1994).

[12] S. Czerwik, On the stability of the quadratic mappings in normed spaces, *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, **62** (1992), 59--64.

[13] D.Ž. Djoković, A representation theorem for $(X_1-1)(X_2-1)\cdot\ldots\cdot(X_n-1)$ and its applications, *Ann. Polon. Math.*, **22** (1969), 189–198.

[14] W. Förg-Rob and J. Schwaiger, A generalization of the cosine equation to n summands, *Grazer Math. Ber.*, **316** (1992), 219—226.

[15] Z. Gajda, On stability of additive mappings, *Internat. J. Math. Sci.*, **14** (1991), 431–434.

[16] Z. Gajda, A remark on the talk of W. Förg-Rob, *Grazer Math. Ber.*, **316** (1992), 234—237.

[17] P. Gavrută, A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **184** (1994), 431–436.

[18] R. Ger, The singular case in the stability behaviour of linear mappings, *Grazer Math. Ber.*, **316** (1992), 59–70.

[19] E. Hewitt, K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis II, Springer-Verlag, 1997.

[20] D.H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*, **27** (1941), 125–153.

[21] B. E. Johnson, Approximately multiplicative maps between Banach algebras, *J. London Math. Soc.*, **37** (1988), 294–316.

[22] Pl. Kannappan, The functional equation $f(xy)+f(xy^{-1})=2f(x)f(y)$ for groups, *Proc. Am. Math. Soc.*, **19** (1968), 69—74.

[23] S. Mazur and W. Orlicz, Grundlegende Eigenschaften der Polynomischen Operationen I, II, *Studia Math.* **5** (1934), 50--68, 179–189.

[24] M.A. Sibaha, B. Bouikhalene, E. Elqorachi, Hyers-Ulam-Rassias stability of the K-quadratic functional equation, *J. Ineq. Pure and appl. Math.*, **8** (2007), article 89.

[25] Th.M. Rassias, On the stability of the linear mapping in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **72** (1978), 297–300.

[26] H. Shin'ya, Spherical matrix functions and Banach representability for locally compact motion groups, *Jpn. J. Math.*, **28** (2002), 163—201.

[27] P. Sinopoulos, Functional equations on semigroups, *Aequationes Math.*, **59** (2000), 255--261.

[28] F. Skof, Local properties and approximation of operators, *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, **53** (1983), 113—129.

[29] H. Stetkær, On a signed cosine equation of N summands, *Aequationes Math.*, **51** (1996), No. 3, 294—302.

[30] H. Stetkær, Wilson's functional equation on C, *Aequationes Math.*, **53** (1997), No. 1-2, 91—107.

[31] H. Stetkær, Functional equation on abelian groups with involution, II, *Aequationes Math.*, **55** (1998), 227—240.

[32] H. Stetkær, Functional equations involving means of functions on the complex plane, *Aequationes Math.*, **56** (1998), 47–62.

[33] H. Stetkær, Functional equations and matrix-valued spherical functions, *Aequationes Math.*, **69** (2005), 271–292.

[34] P. Šemrl, The stability of approximately additive functions, Stability of mappings of Hyers-Ulam type (edited by Th. M. Rassias and J. Tabor), *Hadronic Press, Florida* (1994), 135–140.

[35] A. Wawrzynkiewicz, Group Representations and Special Functions. Examples and Problems prepared by Aleksander Strasburger., *Warszawa PWN*, 1984.